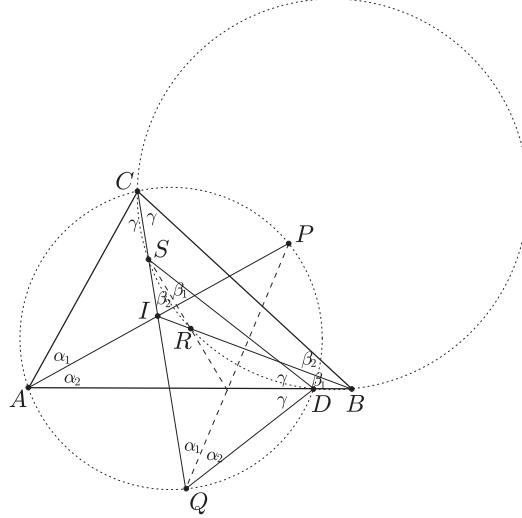


Megoldás. Legyen

$$\alpha_1 = \angle IAC, \quad \alpha_2 = \angle BAI, \quad \beta_1 = \angle IBA, \quad \beta_2 = \angle CBI, \quad \gamma = \angle ICB = \angle ACI.$$

Írjuk fel a Ceva-tétel trigonometrikus alakját az ABC háromszögre és az I pontra:

$$\frac{\sin \angle IAC}{\sin \angle BAI} \cdot \frac{\sin \angle IBA}{\sin \angle CBI} \cdot \frac{\sin \angle ICB}{\sin \angle ACI} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma} = 1.$$



A kerületi szögek tételéből (irányított, azaz modulo 180° szögekkel):

$$\begin{aligned} \angle PQS &= \angle PQC = \angle PAC = \angle IAC = \alpha_1, \\ \angle DQP &= \angle DAP = \angle BAI = \alpha_2, \\ \angle RSD &= \angle RBD = \angle IBA = \beta_1, \\ \angle QSR &= \angle CSR = \angle CBR = \angle CBI = \beta_2, \\ \angle ADQ &= \angle ACQ = \angle ACI = \gamma, \\ \angle SDA &= \angle SDB = \angle SCB = \angle ICB = \gamma. \end{aligned}$$

Végül alkalmazzuk a Ceva-tétel (trigonometrikus alakjának) megfordítását a DSQ háromszögre. Mivel

$$\frac{\sin \angle ADQ}{\sin \angle SDA} \cdot \frac{\sin \angle RSD}{\sin \angle QSR} \cdot \frac{\sin \angle PQS}{\sin \angle DQP} = \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = 1,$$

a $DA = AB$, RS és PQ egyenesek egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak egymással. □

Megjegyzés. Láttuk, hogy az ABC háromszög hasonló a QSD háromszöghöz. Legyen I' az ABC háromszög I pontjának megfelelője a QSD háromszögben. A fenti bizonyítás kulcsa az, hogy a QSD háromszögben az I' izogonális konjugáltja éppen az AB , PQ és RS egyenesek közös pontja.