

I. megoldás. A hosszú tekercsben folyó áram hatására a tekercs belsejében valamekkora, időben periodikusan változó $\Phi(t)$ mágneses fluxus jön létre. A változó mágneses fluxus a hosszú tekercs minden menetében feszültséget indukál, ezek összege minden pillanatban megegyezik a tekercsre kapcsolt váltakozó feszültséggel:

$$U_1(t) = N_1 \frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t}.$$

A lapos tekercsben nem folyik áram (a voltmérő ellenállása nagyon nagy), de a hosszú tekercs szórt mágneses tere feszültséget indukál benne. A feladat ennek a szórt térnek a meghatározása.

A tekercsen kívüli mágneses mező ($D_1 \ll \ell$ miatt) jó közelítéssel olyan, mintha a tekercs egyik végén egy pontszerű forrásból összesen $\Phi(t)$ mágneses fluxus indulna ki *gömbszimmetrikusan*, a tekercs másik végén pedig ugyanekkora fluxus nyelődne el (vagyis mintha egy $-\Phi(t)$ erősségű forrás helyezkedne el ott). A lapos tekercs a hosszú tekercs felezősíkjában, a hosszú tekercshez közel helyezkedik el, így ezen a helyen mindkét forrás külön-külön

$$B(t) = \frac{\Phi(t)}{4\pi \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$$

mágneses indukciót hoz létre (mert a Φ fluxus egy $\ell/2$ sugarú gömb felületén oszlik el egyenletesen). A lapos tekercs közel van a hosszú tekercshez, így B közel merőleges a felületére. A lapos tekercsen áthaladó teljes (mindkét forrásból származó) fluxus emiatt:

$$\Phi_2(t) = 2B(t)\pi \left(\frac{D_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{D_2}{\ell}\right)^2 \Phi(t).$$

Ez az időben változó fluxus a lapos tekercsben

$$U_2(t) = N_2 \frac{\Delta\Phi_2(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} N_2 \left(\frac{D_2}{\ell}\right)^2 \frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{N_2}{N_1} \left(\frac{D_2}{\ell}\right)^2 U_1(t)$$

feszültséget indukál. (Felhasználtuk $U_1(t)$ korábban felírt kifejezését.)

Az $U_1(t)$ és $U_2(t)$ feszültségek minden pillanatban arányosak egymással, így az effektív értékek aránya is ugyanekkora. Ebből a keresett feszültség:

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{N_2}{N_1} \left(\frac{D_2}{\ell}\right)^2 U_1 \approx 4,5 \text{ mV}.$$

II. megoldás (*Fehér Zsombor* megoldása alapján). Egy hosszú, egyenes tekercs (szolenoid) belsejében kialakuló mágneses indukció nagyságára jól ismert a következő összefüggés:

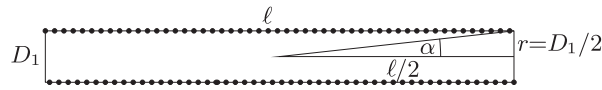
$$B_0 = \mu_0 \frac{N_1 I}{\ell},$$

ahol N_1 a tekercs menetszáma, I a tekercsen átfolyó áramerősség, ℓ a tekercs hossza és $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$.

Ez az összefüggés azonban *véges* hosszúságú tekercsre *csak közelítőleg* igaz! A véges hosszúságú tekercs terét a tekercs középpontjában helyesen a következő kifejezés adja meg:

$$B_{\text{bent}} = B_0 \cos \alpha = \mu_0 \frac{N_1 I}{\ell} \cos \alpha,$$

ahol α a tekercs zárókörének fél látószöge a középpontból nézve (9. ábra). Ez az összefüggés a Biot–Savart-törvény segítségével (integrálszámítással, de akár elemi eszközökkel is) levezethető (lásd lentebb a 2. megjegyzést).



9. ábra

Hosszú, vékony tekercsnél

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{D_1}{\ell} \ll 1,$$

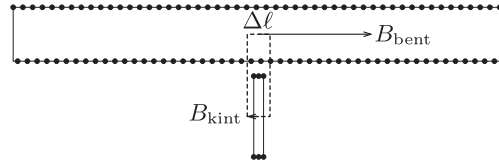
és így $\cos \alpha \approx 1$, tehát az ismert összefüggés általában *jó közelítésként* használható. Ebben a feladatban azonban – mint látni fogjuk – éppen ennek a közelítésnek a pontossága, vagyis B_0 és B_{bent} kicsiny különbsége lesz számunkra fontos!

Írjuk fel a gerjesztési törvényt egy olyan kis téglalapra, amelynek két oldala a két tekercs tengelyén fekszik (10. ábra):

$$B_{\text{bent}} \Delta \ell + B_{\text{kint}} \Delta \ell = \mu_0 \frac{N_1 I}{\ell} \Delta \ell \quad (= B_0 \Delta \ell),$$

ahol B_{kint} a rövid tekercsben lévő mágneses indukció nagysága, $N_1 I \frac{\Delta \ell}{\ell}$ pedig a nagy tekercs azon meneteinek száma, amelyeket a kis hurok körül fog. (Felhasználtuk, hogy a tengelyre merőleges indukciókomponens a szolenoid tengelye tájékán elhanyagolható.) Innen következik, hogy

$$B_{\text{kint}} = B_0 - B_{\text{bent}} = B_0(1 - \cos \alpha) = B_0 \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx B_{\text{bent}} \frac{1}{2} \left(\frac{D_1}{\ell} \right)^2.$$



10. ábra

A tekercsekben indukált feszültség arányos a tekercsek menetszámával és az egy meneten áthaladó fluxussal, amiből a keresett feszültség:

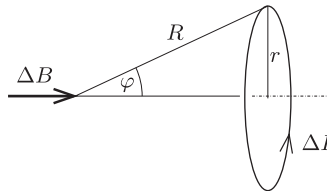
$$U_2 = \frac{N_2 B_{\text{kint}} \pi \left(\frac{D_2}{2} \right)^2}{N_1 B_{\text{bent}} \pi \left(\frac{D_1}{2} \right)^2} U_1 = \frac{1}{2} \frac{N_2}{N_1} \left(\frac{D_2}{\ell} \right)^2 U_1,$$

az I. megoldással megegyezően.

Megjegyzések. 1. A megoldásban nem használtuk fel a megadott adatok közül a hosszú tekercs D_1 átmérőjének és a frekvenciának a számértékét. Ugyanakkor mindkét adat *nagyságrendje* fontos a megoldáshoz! Felhasználtuk, hogy $D_1 \ll \ell$, mert emiatt közelíthettük a külső teret két *pontforrás* terével. A hosszú tekercs induktív ellenállása, és így a tekercsen folyó áram nagysága függ a frekvenciától. Ha a frekvencia sokkal kisebb (például 50 Hz) lenne, akkor a tekercsen a rákapcsolt 100 V feszültség hatására olyan nagy áram indulna meg, amely a tekercset azonnal szétolvasztaná.

2. *A véges hosszúságú tekercs terének levezetése.* Egy r sugarú körvezetőben folyó ΔI erősségű áram által keltett mágneses indukciót a kör síkjára merőleges szimmetriatengely pontjaiban könnyen kiszámíthatjuk a Biot-Savart-törvény segítségével. A szimmetriatengely azon pontjában, ahonnan a körvezető sugara φ szögben látszik, tehát amely ponttól a körvezető pontjai $R = r / \sin \varphi$ távol vannak (11. ábra), a mágneses indukció

$$\Delta B = \mu_0 \frac{\Delta I}{4\pi} \frac{2r\pi}{R^2} \sin \varphi = \mu_0 \frac{\Delta I}{2r} \sin^3 \varphi.$$



11. ábra

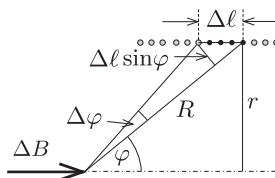
Rakjuk össze az ℓ hosszúságú N menetes tekercset $\Delta \ell$ vastagságú kis köráramokból. Ekkor egy ilyen kis körben

$$\Delta I = \frac{NI}{\ell} \Delta \ell$$

áram folyik, ami a tengelye mentén, a φ szöggel jellemezhető pontban

$$\Delta B = \mu_0 \frac{NI}{2r\ell} \sin^3 \varphi \Delta \ell$$

indukciót hoz létre.



12. ábra

Kihasználva, hogy a tekercs alkotójának kicsiny $\Delta \ell$ hosszúságú darabja a kérdéses pontból

$$\Delta \varphi \approx \frac{\Delta \ell \cdot \sin \varphi}{R} = \frac{\sin^2 \varphi}{r} \cdot \Delta \ell$$

szög alatt látszik (12. ábra), a körvezetők mágneses indukciója így is felírható:

$$\Delta B = \mu_0 \frac{NI}{2\ell} \sin \varphi \Delta \varphi.$$

A tekercs középpontjában létrejövő mágneses indukciót úgy kapjuk meg, hogy ezeket a kis indukciójárulékokat összegezzük $\varphi = \alpha$ -tól $\varphi = \pi - \alpha$ -ig (α a tekercs zárókörének fél látószöge a tekercs középpontjából).

$$B = \sum_{\varphi=\alpha}^{\pi-\alpha} \Delta B = \mu_0 \frac{NI}{2\ell} \sum_{\varphi=\alpha}^{\pi-\alpha} \sin \varphi \Delta \varphi.$$

A fenti képlet végén szereplő összeget egyszerű fizikai megfontolásokkal is meghatározhatjuk. Ha egy m tömegű gyöngyszemet egy függőleges síkban rögzített r sugarú körív mentén (mindvégig érintő irányú erőt alkalmazva) lassan felemeljük a 13. ábrán látható P_1 pontból a P_2 pontig, akkor a végzett munka

$$W = \sum F(\varphi) \Delta s = mgr \sum_{\varphi=\alpha}^{\pi-\alpha} \sin \varphi \Delta \varphi.$$

Másképpen ez a munka a gyöngyszem helyzeti energiájának megváltozásával egyenlő:

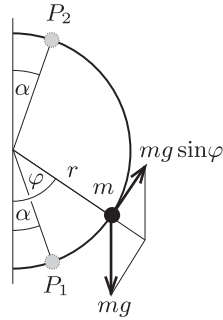
$$W = 2mgr \cos \alpha,$$

tehát

$$\sum_{\varphi=\alpha}^{\pi-\alpha} \sin \varphi \Delta \varphi = 2 \cos \alpha.$$

Ennek ismeretében a véges hosszúságú tekercs mágneses indukciója a tekercs közepénél:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell} \cdot \cos \alpha.$$



13. ábra