

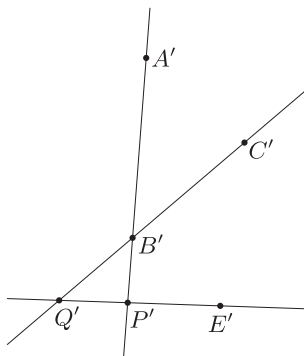
Megoldás. Először azt fogjuk belátni, hogy ha három pont képe egy egyenesre illeszkedik, akkor az eredeti pontok is egy egyenesre esnek.

Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, az állítással ellentétben, hogy létezik három olyan pont, amelyeknek a képe egy egyenesre esik, de az eredeti pontok nem illeszkednek egy egyenesre. Ekkor az eredeti három pont nem illeszkedik egy egyenesre, vagyis egy körre illeszkednek, tehát a feladatban adott feltétel alapján a képek is. Itt viszont azonnal ellentmondásra jutunk, hiszen három pont nem illeszkedhet egyszerre egy körre és egy egyenesre is. A kiinduló feltételünk hamis, tehát ha három pont képe egy egyenesre esik, akkor az eredeti három pont is egy egyenesre esik.

A következőkben pedig azt fogjuk belátni, hogy ha három pont egy egyenesre esik, akkor a képek is.

Most is gondolkodjunk indirekt módon. Tegyük fel, hogy létezik három olyan pont (A , B és C), amelyek egy egyenesre illeszkednek, de a képek (A' , B' és C') nem. Ekkor az előbb belátott állítás értelmében az $A'B'$, $A'C'$ és $B'C'$ egyeneseken elhelyezkedő pontok ősei azon az egyenesen vannak, amelyen A , B és C . Hiszen például tekintsünk egy D' pontot az $A'B'$ egyenesen. Ekkor A , B és D képei egy egyenesre illeszkednek, vagyis az első részben bizonyítottak szerint A , B és D is egy egyenesre illeszkedik.

Most tekintsünk egy olyan E pontot, amely nem illeszkedik az AB egyenesre, és keressük meg a képét.



Vegyünk fel az $A'B'$ egyenesen egy A' -től és B' -től különböző P' pontot, majd tekintsük az $E'P'$ egyenest. Ez az egyenes az $A'C'$ és $B'C'$ egyenesek közül legalább az egyiket metszi, mivel legfeljebb csak az egyikkel lehet párhuzamos. Legyen az egyik ilyen metszéspont Q' . Ekkor Q , P és E pontok képei egy egyenesre illeszkednek, vagyis a Q , P és E pontok is egy egyenesre esnek. Mivel Q' rajta van az $A'C'$ vagy a $B'C'$ egyenesen, P' pedig az $A'B'$ egyenesen, így őseik, Q és P az AB egyenesen vannak. Ezért E -nek is az AB egyenesen kell lennie. Ez viszont ellentmondás, hiszen E -t úgy választottuk meg, hogy ne illeszkedjen az AB egyenesre. Vagyis a kiinduló feltétel hamis, azaz ha három pont egy egyenesre esik, akkor a képek is egy egyenesre esnek.

Ezzel beláttuk azt az állítást, hogy három pont akkor és csak akkor van egy egyenesen, ha a képek is egy egyenesen vannak.