

I. megoldás. Mivel a háromszög kerülete egységnyi, ezért elegendő azt megmutatnunk, hogy

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{(a+b+c)^2}{2}$$

teljesül. Ezzel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk a négyzetreemelés elvégzésével és rendezéssel:

$$8abc < 2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2.$$

Ismét felhasználva az $a + b + c = 1$ egyenlőséget, elegendő megmutatnunk, hogy

$$8abc \cdot 1 < (2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2)(a + b + c),$$

azaz

$$\begin{aligned} 0 &< -a^3 - b^3 - c^3 + a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ac^2 - 2abc, \\ 0 &< (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c). \end{aligned}$$

Ez viszont a háromszög-egyenlőtlenség miatt igaz. Így az eredeti egyenlőtlenség is teljesül, mert ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre.

II. megoldás. Jelölje a háromszög területét T , beírt-, illetve körülírt körének sugarát r és R , kerületét pedig $2s$. Ekkor az ismert összefüggések szerint¹

$$(1) \quad r = \frac{T}{s} \quad \text{és} \quad R = \frac{abc}{4T}.$$

Először megmutatjuk, hogy a háromszög oldalainak ún. *elemi szimmetrikus polinomjai* egyszerűen kifejezhetők r , R és s segítségével, mégpedig a következő módon:

$$\begin{aligned} (2) \quad \sigma_1(a, b, c) &= a + b + c = 2s, \\ (3) \quad \sigma_2(a, b, c) &= ab + bc + ca = s^2 + r^2 + 4rR, \\ (4) \quad \sigma_3(a, b, c) &= abc = 4rRs. \end{aligned}$$

A három összefüggés közül (2) nem más, mint s definíciója, (4) pedig azonnal adódik az (1)-beli két képlet szorzásából. A (3) egyenlőséget szintén az (1) képleteket felhasználva látjuk be. Ezek alapján azt kell bizonyítanunk, hogy

$$ab + bc + ca = \frac{(a+b+c)^2}{4} + \frac{T^2}{s^2} + \frac{abc}{s}.$$

Ezt rendezve és a területet Héron-képletéből kifejezve:

$$2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2 = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{a+b+c} + \frac{8abc}{a+b+c}.$$

Vagyis azt kell megmutatnunk, hogy

$$(2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2)(a + b + c) - 8abc = (a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c).$$

Ezt viszont már kiszámoltuk az I. megoldás során.

Az elemi szimmetrikus polinomok segítségével bármely szimmetrikus polinom (azaz olyan polinom, melynek változót tetszőleges módon felcserélve ugyanazt a polinomot kapjuk) kifejezhető. (Ezt nevezik a *szimmetrikus polinomok alaptételének*.) Esetünkben

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc = (\sigma_1(a, b, c))^2 - 2\sigma_2(a, b, c) + 4\sigma_3(a, b, c).$$

Feladatunk állításának igazolásához tehát azt kell megmutatnunk, hogy

$$(2s)^2 - 2(s^2 + r^2 + 4rR) + 4 \cdot 4rRs < \frac{1}{2}.$$

Felhasználva, hogy $2s = 1$ és a bal oldalon felbontva a zárójeleket, kapjuk, hogy

$$1 - \frac{1}{2} - 2r^2 < \frac{1}{2},$$

ami $r^2 > 0$ miatt nyilván teljesül.

Tehát a feladat állításában szereplő egyenlőtlenség minden háromszögre fennáll. Megoldásunkból az is látszik, hogy az egyenlőtlenség jobb oldalán az $\frac{1}{2}$ helyett nem írhatunk kisebb számot, mert r^2 tetszőlegesen kicsi lehet.

¹Ezek bizonyítása megtalálható pl. Kiss Gy.: Amit jó tudni a háromszögekről, *KöMaL*, **52** (2002), 130–139; <http://www.komal.hu/cikkek/kissgy/haromszokekrol/amtjotudni.h.shtml>.