I. megoldás. Mivel a felső doboz nem mozdul el az alsón, a két dobozt tekinthetjük egyetlen, $m+M$ tömegű testnek, amely gyorsulva mozog a lejtő mentén lefelé. A két doboz rendszerére a lejtő síkjával párhuzamos irányban hat a nehézségi erő lejtővel párhuzamos komponense, valamint a súrlódási erő. A mozgásegyenlet:

$$(m+M)g\sin\alpha-\mu(m+M)g\cos\alpha=(m+M)a,$$

tehát a gyorsulása:

$$a=(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\,g.$$

(A feladat szövege szerint a két elengedett doboz *lecsúszik* a lejtőn, tehát $a>0$, vagyis fennáll, hogy $\mu<\operatorname{tg}\alpha$.)

Írjuk fel most a felső dobozra a Newton-féle mozgásegyenlet lejtővel párhuzamos komponensét! A két doboz között fellépő súrlódási erőt S-sel jelölve és felhasználva a gyorsulás fentebb kiszámított értékét, ezt kapjuk:

$$mg\sin\alpha-S=mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha),$$

ahonnan a súrlódási erő:

$$S=\mu mg\cos\alpha.$$

Megjegyzés. Jelöljük a két doboz közötti súrlódási tényezőt μ^*-gal! Mivel a felső dobozt az alsóhoz szorító erő $N=mg\cos\alpha$, továbbá tudjuk, hogy a felső doboz nem csúszik az alsón, így fennáll $S<\mu^*N$, vagyis

$$\mu^*>\frac{S}{N}=\frac{\mu mg\cos\alpha}{mg\cos\alpha}=\mu.$$

A feladat szövegében szereplő „elegendően nagy” súrlódás tehát azt jelenti, hogy a két doboz közötti súrlódási együtthatónak nagyobbnak kell lennie, mint az alsó doboz és a lejtő közötti súrlódás μ együtthatója.

Foglalkozzunk most a felső dobozra ható forgatónyomatékokkal! Amíg a felső doboz nem dől fel, addig a rá ható erők eredő forgatónyomatéka (a doboz tömegközéppontjára vonatkoztatva) zérus:

$$S\cdot\frac{h}{2}-N\cdot x=0,$$

ahol x a tartóerő hatásvonalának a felső doboz tömegközéppontjától mért távolsága. Innen

$$x=\frac{S}{N}\cdot\frac{h}{2}=\frac{\mu mg\cos\alpha}{mg\cos\alpha}\cdot\frac{h}{2}=\mu\,\frac{h}{2}.$$

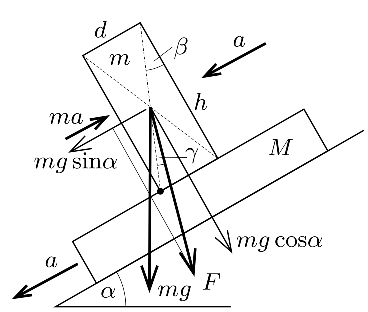
Ez az x távolság azonban nem lehet nagyobb, mint a doboz szélességének fele:

$$x\le\frac{d}{2},\qquad\text{vagyis}\qquad\mu\le\frac{d}{h}.$$

II. megoldás. Ha az M tömegű doboz a lejtőn nem csúszna, a felső doboz fel nem borulásának feltétele az lenne, hogy a nehézségi erő vektorának hatásvonala az alátámasztási felületen haladjon át. Az alsó doboz gyorsulása miatt azonban ez a feltétel úgy módosul, hogy nehézségi erő mellett a gyorsuló vonatkoztatási rendszerben fellépő (látszólagos) tehetetlenségi erőt is figyelembe kell vennünk. Ez az erő ma nagyságú, ahol

$$a=(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\,g$$

a két doboz közös gyorsulása, és a tehetetlenségi erő hatásvonala (a nehézségi erőéhez hasonlóan) a felső doboz tömegközéppontján halad keresztül.



A felső dobozra ható nehézségi erő és tehetetlenségi erő F eredője a lejtő irányában

$$F_1 = mg\sin\alpha - ma = \mu mg\,\cos\alpha,$$

a lejtőre merőlegesen pedig

$$F_2 = mg\,\cos\alpha$$

nagyságú komponenssel rendelkezik. Ez az erő a felső doboz h hosszúságú oldallapjával γ szöget zár be, ahol

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{F_1}{F_2} = \frac{\mu mg\,\cos\alpha}{mg\,\cos\alpha} = \mu.$$

Másrészt a felső doboz tömegközéppontját a bal alsó élével összekötő egyenes a h hosszúságú oldallappal

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{d}{h}$$

szöget zár be. A felső doboz akkor nem borul fel, ha

$$\gamma \le \beta, \qquad \text{vagyis} \qquad \operatorname{tg}\gamma = \mu \le \operatorname{tg}\beta = \frac{d}{h}.$$

Tehát annak szükséges feltétele, hogy a felső doboz ne boruljon fel: $d \ge \mu h$.