

Megoldás. Használjunk az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög S súlypontjából induló helyvektorokat, betűzzük őket a végpontjuknak megfelelő kisbetűkkel; ekkor

$$\frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1 + \mathbf{d}_1}{4} = \mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad \text{vagyis} \quad \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1 + \mathbf{d}_1 = \mathbf{0}.$$

Állítsuk elő az $\overrightarrow{SA_2} = \mathbf{a}_2$ vektort:

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1 + \mathbf{d}_1}{3} = -\frac{1}{3}\mathbf{a}_1.$$

Hasonlóan állíthatjuk elő az $\overrightarrow{SB_2} = \mathbf{b}_2$, $\overrightarrow{SC_2} = \mathbf{c}_2$ és $\overrightarrow{SD_2} = \mathbf{d}_2$ vektorokat.

Állítás. $\mathbf{a}_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \mathbf{a}_1$ minden $n > 1$, $n \in N$ esetén; és hasonlóan a $\mathbf{b}_n$, $\mathbf{c}_n$, $\mathbf{d}_n$ vektorokra.

Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk.

$n = 2$ -re láttuk, hogy igaz.

Tegyük fel, hogy n -re igaz, és lássuk be $n + 1$ -re.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n+1} &= \frac{\mathbf{b}_n + \mathbf{c}_n + \mathbf{d}_n}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \mathbf{b}_1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \mathbf{c}_1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \mathbf{d}_1 \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} (\mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1 + \mathbf{d}_1) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} (-\mathbf{a}_1) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \mathbf{a}_1. \end{aligned}$$

Hasonló gondolatmenettel belátható az állítás a másik három $n + 1$ indexű vektorra.

Így az SA_n , SB_n , SC_n , SD_n szakaszok egyre rövidülnek, hosszuk minden határon túl csökken, vagyis véges k küszöbindex után az $n > k$ indexű A_n pontok mind az S középpontú egységsugarú körön belül lesznek, tehát csak véges számú ilyen pont esik a körön kívülre.