

Megoldás. A külső légnyomás p_0 , ugyanekkora a nyomás a jobb oldali folyadék részben is, hiszen ott a folyadék nem gyorsul. A folyadék bal oldali részében a nyomás $p_0 + \Delta p$. A vastagabb csőrészben v_1 sebességgel áramlik a folyadék (és vele együtt ugyanekkora sebességgel mozog a dugattyú is), a vékonyabb csőrészben az áramlási sebesség v_2 .
a) A dugattyú egyenletesen mozog (nem gyorsul), a rá ható erők eredője tehát nulla:

$$F - \Delta p A = 0.$$

Az áramló folyadékra felírhatjuk a kontinuitási egyenletet:

$$Av_1 = kAv_2$$

és a Bernoulli-törvényt:

$$p_0 + \Delta p + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

A fenti három egyenletből kifejezhetjük v_1 -et a megadott paraméterekkel:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2Fk^2}{\rho A(1-k^2)}} = \sqrt{\frac{F}{12\rho A}},$$

ekkora állandósult sebességgel mozog tehát a dugattyú.

b) A falnak csapódó víz sebességének vízszintes komponense v_2 -ről gyakorlatilag *nullára csökken*. A fal által a vízre kifejtett erőt Newton II. törvényének eredeti alakját felhasználva számíthatjuk ki. Valamekkora Δt idő alatt a falnak csapódó víz sugar „hossza” $\ell = v_2 \Delta t$, tömege $m = \rho \ell k A$, így a fal által (balra) kifejtett erő:

$$F_{\text{fal} \rightarrow \text{víz}} = \frac{|\Delta I|}{\Delta t} = \frac{m|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{\rho k A \ell |\Delta v|}{\Delta t} = \frac{\rho A v_1^2}{k} = \frac{2k}{1-k^2} F = \frac{5}{12} F.$$

A víz ellenereje a falra ($F_{\text{víz} \rightarrow \text{fal}}$) ezzel megegyezik (csak az iránya ellentétes, tehát jobbra mutat).

c) A cső nyugalomban van, így amekkora nagyságú vízszintes erőt fejt ki a víz a csőre ($F_{\text{víz} \rightarrow \text{cső}}$), a rögzítés által a csőre kifejtett $F_{\text{rögzítés} \rightarrow \text{cső}}$ erő is ugyanekkora nagyságú (de vele ellentétes irányú). Ugyanez érvényes a megfelelő ellenerőkre is:

$$F_{\text{cső} \rightarrow \text{rögzítés}} = F_{\text{rögzítés} \rightarrow \text{cső}} = F_{\text{víz} \rightarrow \text{cső}} = F_{\text{cső} \rightarrow \text{víz}}.$$

A keresett (a cső által a rögzítésre kifejtett) erő tehát ugyanakkora, amekkora erővel a cső hat a vízre. Ez utóbbi viszont ismét a Newton-törvény segítségével határozható meg. A csőben lévő víz lendülete Δt idő alatt $m = \rho v_1 A \Delta t$ tömegű részének sebessége v_1 -ről v_2 -re nő. A víz lendületváltozását a vízre ható eredő erő okozza:

$$\begin{aligned} F_{\text{eredő}} &= F - F_{\text{cső} \rightarrow \text{víz}} = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{m \Delta v}{\Delta t} = \frac{\rho v_1 A \Delta t (v_2 - v_1)}{\Delta t} = \\ &= \rho A \left(\frac{1}{k} - 1 \right) v_1^2 = \frac{2k}{k+1} F. \end{aligned}$$

Ebből a kérdéses erő

$$F_{\text{cső} \rightarrow \text{rögzítés}} = F_{\text{cső} \rightarrow \text{víz}} = F - F_{\text{eredő}} = F \left(1 - \frac{2k}{k+1} \right) = \frac{1-k}{1+k} F = \frac{2}{3} F$$

nagyságú.

Megjegyzés. Figyelemre méltó, hogy $F_{\text{víz} \rightarrow \text{fal}} + F_{\text{cső} \rightarrow \text{rögzítés}} \neq F$, de ez nem ellentmondás, hiszen (a sebességek időbeli állandósága ellenére) a teljes folyadékmennyiség lendülete időben egyre változik, csökken. A teljes vízmennyiségre ható eredő erő

$$F - F_{\text{fal} \rightarrow \text{víz}} - F_{\text{cső} \rightarrow \text{víz}} = -\frac{2k^2}{1-k^2} F$$

és ez éppen megegyezik a

$$\frac{\Delta I_{\text{összes}}}{\Delta t} = -\frac{\Delta m \cdot v_1}{\Delta t} = -\rho A v_1^2$$

mennyiséggel, összhangban Newton II. törvényével.