

**Megoldás.** Jelöljük a kiskocsi kezdősebességének nagyságát  $v$ -vel, állandó gyorsulását  $a$ -val, a mozgás teljes idejét pedig  $T$ -vel. Legyen  $t = 1$  s, ami az utolsó másodperc idejét jelöli. A feladat szövegéből nem derül ki, hogy a kocsit lefelé vagy felfelé löktük meg, ezért több esetet is meg kell vizsgálnunk.

**I. eset.** *A kiskocsit lefelé löktük meg.*

A mozgás teljes ideje alatt megtett út:

$$s = vT + \frac{a}{2}T^2.$$

A kocsi a mozgás utolsó,  $t$  időtartamú részében tette meg az útjának felét, így a mozgás kezdeti,  $T-t$  hosszú szakaszában is az út felét tette meg:

$$\frac{s}{2} = v(T-t) + \frac{a}{2}(T-t)^2.$$

A két egyenletből algebrai átalakítások után kapjuk, hogy

$$\frac{T}{t} = 2 - \frac{v}{at} + \sqrt{\left(\frac{v}{at}\right)^2 + 2}.$$

Látható, hogy érdemes bevezetni a  $\lambda = v/(at) \geq 0$  dimenziótlan mennyiséget, és ennek függvényében vizsgálni a  $T(\lambda)$  időt, keresni annak maximumát. Mivel az

$$f(\lambda) = 2 - \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 2}$$

függvény monoton csökkenő (ezt grafikus ábrázolással vagy differenciálszámítással láthatjuk be),  $T(\lambda)$  maximális értéke

$$T_{\max}^{(I)} = (2 + \sqrt{2})t \approx 3,4 \text{ s.}$$

**II. eset.** *A kiskocsit felfelé löktük meg, és még a lassulása közben állítottuk meg.*

A megadott feltétel szerint

$$\frac{1}{2} \left[ vT - \frac{a}{2}T^2 \right] = v(T-t) - \frac{a}{2}(T-t)^2, \quad v > aT.$$

Innen (a korábbi jelöléssel)

$$\frac{T}{t} = \lambda + 2 - \sqrt{\lambda^2 + 2},$$

és a megállásra vonatkozó feltétel szerint  $\lambda > \sqrt{2}$ . Mivel  $T(\lambda)$  monoton növekvő függvény, maximuma nincs, csak határértéke (ami egyben a felső korlátja):

$$T^{(II)} < 2t = 2 \text{ s,}$$

és a felső korlátot akkor közelíti meg  $T$ , ha  $\lambda \gg 1$ , vagyis a kezdősebesség nagyon nagy.

**III. eset.** *A kiskocsit felfelé löktük meg, de nem túl nagy kezdősebességgel. A kocsi egy idő után megáll, majd a mozgásának végén, annak  $t$  időtartama alatt már gyorsulva mozog lefelé a lejtőn.*

A kiskocsi az indítás után  $T_0 = v/a$  idő múlva áll meg, ezalatt

$$s_1 = \frac{v^2}{2a}$$

utat tesz meg felfelé. Utána  $T-t-(v/a)$  ideig mozogva lefelé még megtesz

$$s_2 = \frac{a}{2} \left( T - t - \frac{v}{a} \right)^2$$

utat, majd a mozgás utolsó  $t$  idejében

$$s_3 = \frac{a}{2} \left( T - \frac{v}{a} \right)^2 - \frac{a}{2} \left( T - t - \frac{v}{a} \right)^2$$

utat. Az  $s_1 + s_2 = s_3$  feltételből – algebrai átalakítások után – a mozgás teljes idejére a

$$T(\lambda) = \left[ 2 + \lambda + \sqrt{2 - \lambda^2} \right] t$$

képletet kapjuk. Ennek a függvénynek  $\lambda = 1$ -nél van maximuma, és

$$T_{\max}^{(III)} = 4t = 4 \text{ s.}$$

Ha az utak közötti kapcsolatot leíró egyenletet nem  $T$ -re, hanem  $\lambda$ -ra oldjuk meg, ezt kapjuk:

$$\lambda = \frac{T - 2t \pm \sqrt{T(4t - T)}}{2t}.$$

Látható, hogy teljesülnie kell a  $T \leq 4t = 4$  s feltételnek, és ha  $T = 4t$ , akkor  $\lambda = 1$ .

*Megjegyzés.* Ha például a kezdősebesség  $v = 1$  m/s, és a lejtő hajlásszögét úgy állítjuk be, hogy a gyorsulás  $1 \text{ m/s}^2$  nagyságú legyen, akkor a kiskocsi a mozgásának első másodpercében felfelé mozog a lejtőn, és 0,5 méter utat tesz meg. A második másodpercben lefelé 0,5 métert, a harmadikban 1,5 métert, a negyedikben pedig 2,5 métert gurul lefelé. Látható, hogy teljesül a feladat követelménye:

$$\frac{0,5 + 0,5 + 1,5 + 2,5}{2} \text{ m} = 2,5 \text{ m}.$$

**IV. eset.** *A kiskocsit felfelé löktük meg, méghozzá úgy, hogy a visszafordulásának pillanata a mozgás utolsó  $t$  időtartamára esik.*

Az előző három esethez hasonló vizsgálódással beláthatjuk, hogy a mozgás teljes ideje ilyenkor legfeljebb  $2t = 2$  s lehet, és ez a határeset akkor valósul meg, ha a kiskocsi  $t$  ideig mozog felfelé, majd ugyanennyit lefelé.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a kiskocsi mozgása legfeljebb 4 másodpercig tarthat. Ilyen időtartamú lesz a mozgás, ha a kocsit a lejtőn felfelé indítjuk el úgy, hogy a kezdősebesség és a gyorsulás hányadosa éppen 1 másodperc legyen.