

I. megoldás. Jelölje x a 777 fejű sárkány 9 fejű nyakainak számát, és y a 13 fejű nyakainak számát. Ekkor $9x + 13y = 777$, ahol $x, y \in N$.

Nyilván $13y \leq 777$, amiből $y \leq \left\lceil \frac{777}{13} \right\rceil = 59$. Tehát $0 \leq y \leq 59$.

$13y = 777 - 9x = 3(259 - 3x)$. Mivel $3 \mid 3(259 - 3x)$, ezért $3 \mid 13y$, vagyis $(13, 3) = 1$ miatt $3 \mid y$.

259 nem osztható 3-mal, ezért 9 nem osztója $3(259 - 3x)$ -nek, és így $13y$ -nak sem, ezért y -nak sem. Vagyis y csak $9k + 3$ vagy $9k + 6$ alakú lehet.

1. eset: $y = 9k + 3 \leq 59$, azaz $0 \leq k \leq 6$.

$$9x + 13(9k + 3) = 777, \quad 9x + 13 \cdot 9k = 738, \quad x + 13k = 82, \quad x = 82 - 13k.$$

Ez minden $0 \leq k \leq 6$ esetén pozitív szám.

Így a 9 fejű és 13 fejű nyakakra vonatkozó lehetséges $(x; y)$ számpárok:

$$(82; 3), \quad (69; 12), \quad (56; 21), \quad (43; 30), \quad (30; 39), \quad (17; 48) \quad \text{és} \quad (4; 57).$$

2. eset: $y = 9l + 6 \leq 59$, azaz $0 \leq l \leq 5$.

$$9x + 13(9l + 6) = 777, \quad 9x + 13 \cdot 9l = 699.$$

A bal oldal osztható 9-cel, a jobb oldal viszont nem, ez ellentmondás, így ez az eset nem ad megoldást.

Tehát összesen hét különböző 777 fejű sárkány létezik.

II. megoldás. Legyen a 9-fejű nyakak száma a , a 13-fejű nyakak száma b .

Ekkor teljesül a következő összefüggés: $9a + 13b = 777$, amiből

$$a = \frac{777 - 13b}{9} = 86 - b + \frac{3 - 4b}{9}.$$

Az a és b értéke akkor megfelelő, ha mindkét oldal egész szám és pozitív; ebből egyelőre csak az előbbi követelménnyel foglalkozunk. Ez pontosan akkor teljesül, ha b is és $\frac{3 - 4b}{9} = x$ is egész, azaz $4b + 9x = 3$, vagyis $b = \frac{3 - 9x}{4} = -2x + \frac{3 - x}{4}$. Ez akkor és csak akkor egész, ha tetszőleges y egésszel $3 - x = 4y$, vagyis $x = 3 - 4y$. Ez azt jelenti, hogy

$$b = -2(3 - 4y) + y = -6 + 9y \quad \text{és} \quad a = 86 - (-6 + 9y) + (3 - 4y) = 95 - 13y.$$

Szükséges még, hogy a és b egyike se legyen negatív: $a = 95 - 13y \geq 0$, azaz $y \leq 7$, valamint $b = -6 + 9y \geq 0$, vagyis $y \geq 1$. Így $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ lehet, tehát 7 különböző értékpár adódott $(a; b)$ -re, ennyi különböző 777 fejű sárkány van.