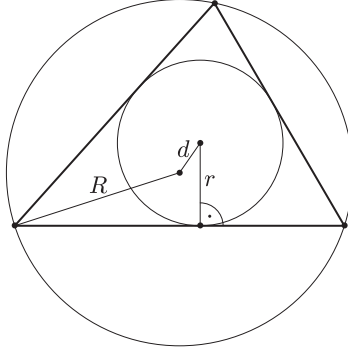


I. megoldás. Induljunk ki a feltételből és alakítsuk át, majd ismét használjuk fel az eredeti feltételt. Így kapjuk, hogy:

$$R < r(\sqrt{2} + 1), \quad R^2 < Rr(\sqrt{2} + 1), \\ R^2 - 2Rr < Rr(\sqrt{2} - 1) < r(\sqrt{2} + 1) \cdot r(\sqrt{2} - 1) = r^2.$$



Euler tétele szerint, ha d jelöli a háromszög beírható köre és körülírt köre középpontjának a távolságát, akkor

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Feltételünkből tehát $d^2 < r^2$, azaz $d < r$ következik.

A két kör középpontjának a távolsága kisebb, mint a beírt kör sugara, ezért a körülírt kör középpontja a beírt kör belsejében, s így a háromszög belsejében van. Viszont egy háromszög körülírt körének középpontja pontosan akkor van a háromszög belsejében, ha a háromszög hegyesszögű. Tehát a $R < r(\sqrt{2} + 1)$ feltételből következik, hogy a háromszög hegyesszögű.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha egy háromszögben teljesül az eredeti feltétel átalakításával kapott, azzal ekvivalens

$$\frac{r}{R} + 1 > \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + 1 = \sqrt{2}$$

egyenlőtlenség, akkor a háromszög hegyesszögű.

Jelölje a háromszög szögeit α , β és γ . Tudjuk, hogy

$$\frac{r}{R} + 1 = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$$

(ennek bizonyítását lásd a megoldás utáni megjegyzésben). Ezért elég azt megmutatnunk, hogy ha a háromszög nem hegyesszögű, akkor

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{2}.$$

Feltehetjük, hogy γ a legnagyobb szög. Ekkor $\gamma \geq 90^\circ$, és ezért $\alpha + \beta \leq 90^\circ$, továbbá $\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta)$. Tehát azt kell belátnunk, hogy

$$\cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \leq \sqrt{2}.$$

A koszinuszok összegére vonatkozó képletet alkalmazva, felhasználva, hogy $0 < \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1$, végül pedig a kétszeres szög koszinuszának képletét használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos(\alpha + \beta) \\ &\leq 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 1. \end{aligned}$$

Bevezetve a $\delta = \frac{\alpha + \beta}{2}$ jelölést azt kell tehát megmutatnunk, hogy ha $0^\circ \leq \delta \leq 45^\circ$, azaz $1 \geq \cos \delta \geq \sqrt{2}/2$, akkor

$$2 \cos \delta - 2 \cos^2 \delta + 1 \leq \sqrt{2}.$$

Ez rendezés és teljes négyzetté kiegészítés után ekvivalens a

$$0 \leq \left(\cos \delta - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2\sqrt{2} - 3}{4}$$

egyenlőtlenséggel. A $\cos \delta$ -ra vonatkozó feltétel miatt itt a jobb oldal akkor a legkisebb, ha $\cos \delta = \sqrt{2}/2$, s értéke ekkor 0. Vagyis az egyenlőtlenség mindig fennáll, ami bizonyítja állításunkat.

Megjegyzés. Ha a háromszög oldalait a szokásos módon a , b és c , kerületét $2s$, területét pedig T jelöli, akkor az ismert $r = \frac{T}{s}$ és $R = \frac{abc}{4T}$ összefüggéseket és Héron képletét felhasználva kapjuk, hogy

$$(1) \quad \frac{r}{R} + 1 = \frac{4T^2}{sabc} + 1 = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) + 2abc}{2abc}.$$

A szögek koszinuszait a koszinusztételből kifejezve majd közös nevezőre hozva pedig azt kapjuk, hogy

$$(2) \quad \begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \\ &= \frac{-a^3 - b^3 - c^3 + ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2}{2abc}. \end{aligned}$$

Ezután egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az (1) és (2) egyenlőségek jobb oldalán álló kifejezések megegyeznek, ami bizonyítja a feladat megoldásában felhasznált azonosságot.