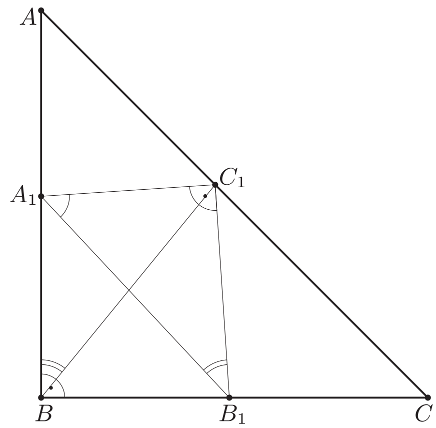
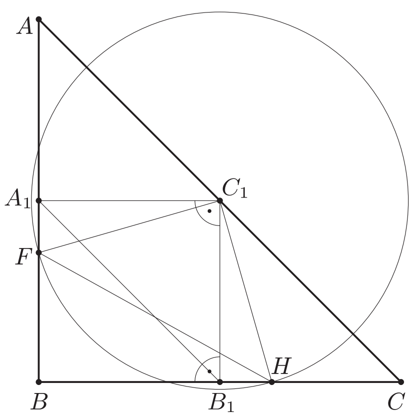
Megoldás. Az $A_1B_1C_1$ háromszög derékszögű csúcsa vagy valamelyik befogón vagy az átfogón van.

I. eset: a derékszögű csúcs az átfogón található. Ekkor az $A_1BB_1C_1$ négyszög húrnégyszög, mivel szemközti szögeinek összege $180°$ (*1. ábra*).



1. ábra

Az azonos húrhoz tartozó kerületi szögek egyenlők, így $A_1BC_1\sphericalangle = A_1B_1C_1\sphericalangle = 45°$, tehát az $ABC\sphericalangle$-et a BC_1 szakasz felezi. Mivel az ABC háromszög egyenlő szárú, ezért ez a szögfelező egyben oldalfelező is, és így a C_1 pont az AC szakasz felezőpontjában található (*2. ábra*).



2. ábra

Legyen a B_1 pont a BC, az A_1 pont pedig az AB oldal felezőpontja. Ekkor az $A_1B_1C_1$ és az ABC háromszög közötti hasonlósági arány 1:2. Mivel $BC = 1$, ezért $AC = \sqrt{2}$ és így $A_1B_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Tekintsünk egy másik, C_1 csúcsú, egyenlő szárú derékszögű háromszöget. Mivel $C_1B_1 \perp BC$, ezért ilyet csak úgy kapunk, ha egy C_1 középpontú, $r > C_1B_1$ sugarú körrel metsszük el az ABC háromszög befogóit. A kapott háromszög befogója így nagyobb lesz, mint C_1B_1, és így nyilván az átfogója is nagyobb lesz, mint az $A_1B_1C_1$ háromszögé: $FH > A_1B_1$.

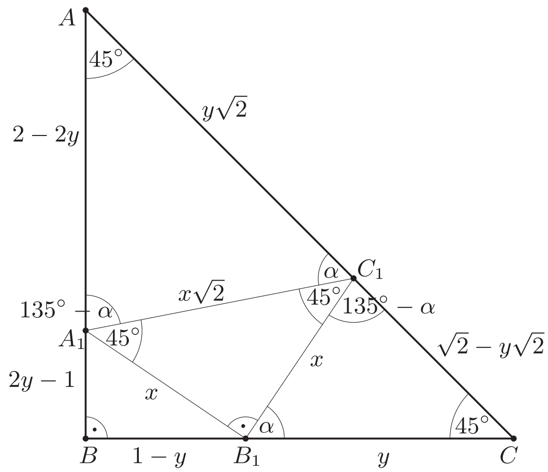
Tehát ebben az esetben A_1B_1 minimuma $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

II. eset: a derékszögű csúcs az egyik befogón található.

Legyen $A_1B_1 = x$ és $B_1C = y$. Ekkor $A_1C_1 = x\sqrt{2}$.

Jelölje a CB_1C_1 szöget α. Ekkor $CC_1B_1\sphericalangle = 180° - 45° - \alpha = 135° - \alpha$. Ebből $AC_1A_1\sphericalangle = 180° - CC_1B_1\sphericalangle - B_1C_1A_1\sphericalangle = \alpha$ és így $AA_1C_1\sphericalangle = 135° - \alpha$. Tehát a $B_1CC_1\triangle$ és a $C_1AA_1\triangle$ a szögei egyenlőek, ezért a két háromszög hasonló. Így

$$\frac{AC_1}{y} = \frac{x\sqrt{2}}{x}, \quad \text{amiből} \quad AC_1 = y\sqrt{2} \quad (\textit{3. ábra}).$$



3. ábra

Mivel $BC = 1$, ezért egyrészt $BB_1 = 1 - y$, másrészt $AC = \sqrt{2}$, és ebből $CC_1 = \sqrt{2} - y\sqrt{2}$. Tudjuk, hogy $AA_1 = \sqrt{2}CC_1$, amiből $AA_1 = \sqrt{2}\left(\sqrt{2} - y\sqrt{2}\right) = 2 - 2y$, és így $A_1B = 1 - (2 - 2y) = 2y - 1$.

Az A_1BB_1 háromszögben felírhatjuk a Pitagorasz-tételt:

$$(2y-1)^2 + (1-y)^2 = x^2, \quad \text{vagyis} \quad 5y^2 - 6y + 2 = x^2.$$

Látható, hogy x-nek pontosan akkor van minimuma, amikor az $5y^2 - 6y + 2$ kifejezésnek (ha a kifejezés értéke ott pozitív). Ennek a másodfokú függvénynek a minimumhelye $y = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 5} = \frac{3}{5}$-ben van, ekkor

$$A_1B_1 = x = \sqrt{5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{5} + 2} = \frac{\sqrt{5}}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tehát az A_1B_1 távolság minimálisan $\frac{\sqrt{5}}{5}$ lehet.