

Megoldás. Válasszuk meg $f(1)$ értékét tetszőleges, 0-tól különböző valós számnak (egyébként a lépések során 0-val osztanánk): legyen $f(1) = a$, ahol $a \neq 0$. Az összefüggés alapján kiszámolhatjuk f első néhány értékét:

$$f(1) = a, \quad f(2) = (p+1) \cdot a, \quad f(3) = \frac{(p+1)(p+2)}{2} \cdot a, \\ f(4) = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} \cdot a.$$

Ezek alapján azt sejtjük, hogy ha $n \geq 2$, akkor

$$f(n) = \frac{(p+1)(p+2) \dots (p+n-1)}{(n-1)!} \cdot a = \frac{(p+n-1)!}{p!(n-1)!} \cdot a = \binom{p+n-1}{p} a.$$

Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk. Láthattuk, hogy $n = 2, 3, 4$ -re igaz. Tegyük fel, hogy n -ig igaz, és bizonyítsunk $n+1$ -re. Feltételünk szerint:

$$\frac{p}{f(1) + f(2) + \dots + f(n)} = \frac{p+1}{f(n)} - \frac{p+1}{f(n+1)},$$

ebbe írjuk be az indukciós feltevésünket ($f(1)$ -et $\binom{p}{p}a$ -ként írva):

$$\frac{p}{\binom{p}{p}a + \binom{p+1}{p}a + \dots + \binom{p+n-1}{p}a} = \frac{p+1}{\binom{p+n-1}{p}a} - \frac{p+1}{f(n+1)}.$$

Alkalmazzuk az ismert

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{p+n-1}{p} = \binom{p+n}{p+1}$$

összefüggést: Ezt beírva:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\binom{p+n}{p+1}a} &= \frac{p+1}{\binom{p+n-1}{p}a} - \frac{p+1}{f(n+1)}, \\ \frac{p+1}{f(n+1)} &= \frac{p+1}{\binom{p+n-1}{p}a} - \frac{p}{\binom{p+n}{p+1}a} = \frac{(p+1)p!(n-1)!}{(p+n-1)!a} - \frac{p(p+1)!(n-1)!}{(p+n)!a} = \\ &= \frac{(p+n)(p+1)!(n-1)! - p(p+1)!(n-1)!}{(p+n)!a} = \\ &= \frac{n(p+1)!(n-1)!}{(p+n)!a} = \frac{(p+1)!n!}{(p+n)!a}, \\ f(n+1) &= a \frac{(p+n)!}{p!n!} = a \binom{p+n}{p}, \end{aligned}$$

és éppen ezt akartuk belátni. Ezzel indukciós bizonyításunkat befejeztük.

Könnyen látható behelyettesítéssel, de előbbi bizonyításunkból is látszik, hogy a felírt alakú függvények valóban ki is elégítik minden n -re az összefüggést. Így tehát pontosan a következő függvények megfelelőek: $f(n) = \binom{p+n-1}{p}a$, ahol a tetszőleges nemnulla valós szám.