

I. megoldás. Defináljuk az f_n függvényt a pozitív egész számpárokon a következőképpen:

$$f_n(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor \geq y, \\ 0, & \text{ha } \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor < y. \end{cases}$$

Nyilván $f_n(x, y)$ értéke pontosan akkor 1, ha $\frac{n}{x} \geq y$, vagyis ha $\frac{n}{y} \geq x$, ezért

$$f_n(y, x) = f_n(x, y).$$

A bevezetett jelöléssel az összeg a következőképpen alakítható:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k-1) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor &= \sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} 1 + \sum_{j=\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor+1}^n 0 \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left((2k-1) \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} f_n(k, j) \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} (2k-1) f_n(k, j) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor} (2k-1) f_n(j, k) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor} (2k-1) \cdot 1 + \sum_{k=\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor+1}^n (2k-1) \cdot 0 \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor} (2k-1) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{n}{j} \right]^2 = \sum_{k=1}^n \left[\frac{n}{k} \right]^2. \end{aligned}$$

II. megoldás. Megoldásomhoz ötletet adott a *KöMaL Fórum*: Érdekes matekfeladatok 3931. bejegyzése.

Rajzoljunk oszlopdiagramot a derékszögű koordináta-rendszer első síknegyedébe úgy, hogy az x tengely k -edik egységszakasza fölé $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^2$ magasságú oszlopot rajzolunk. Az oszlopok együttes területe ekkor a jobb oldal értékét adja, és az oszlopok „ereszkednek”, ahogy k értéke nő. Most tekintsük ezt, mint sordigramot: nézzük meg, milyen hosszú sor lóg ki az y tengely a $((k-1)^2)$ -edikről a k^2 -edik egységszakaszig terjedő tartományából. Mivel csak négyzetszám magasságú oszlopok vannak, az itt kilógó sorok együtt egy téglalapot alkotnak, melynek területe a két oldalának a szorzata. Az egyik oldala $2k-1$, a másik pedig az a hossz, amennyire ez benyúlik. A téglalap addig tart, amíg az a -edik oszlop magassága legalább k^2 , azaz

$$\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor^2 \geq k^2, \quad \left(\frac{n}{a} \right)^2 \geq k^2, \quad \left(\frac{n}{k} \right)^2 \geq a^2, \quad \frac{n}{k} \geq a.$$

Mivel a egész, azért $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \geq a$. Tehát a sorok által alkotott k -edik téglalap területe $(2k-1) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$; ezzel azt kaptuk, hogy a bal oldali összeg is a diagram területét adja. Ezzel bizonyítottuk az állítást.