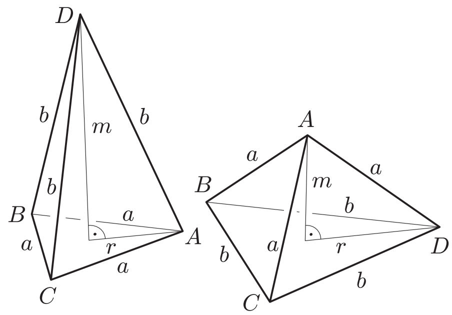
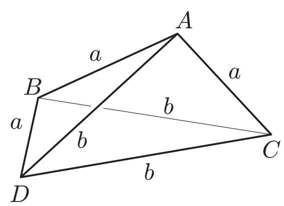
Megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy az a és b hosszúságú élek egymáshoz képest hogyan helyezkedhetnek el egy $ABCD$ tetraéderben. Mivel a tetraédernek 4 csúcsa van, ezért biztosan van olyan csúcs, melyben legalább 2 darab a hosszúságú él találkozik. Választhatjuk úgy a csúcsok jelölését, hogy $AB = AC = a$ legyen. Ha a harmadik a hosszúságú él BC vagy AD, akkor a tetraédernek van szabályos háromszöglapja, az első esetben ABC, a második esetben pedig BCD (*1. ábra*). Ha a harmadik a hosszúságú él nem BC és nem is AD, akkor választhatjuk úgy a jelölést, hogy BD hossza legyen a, ez a harmadik eset (*2. ábra*).



1. ábra

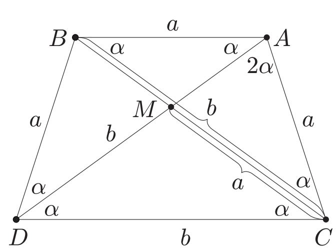


2. ábra

Meghatározzuk, hogy az egyes esetekben milyen b/a arányok esetén létezik tetraéder.

Az első és a második esetben legyen a szabályos háromszöglap körülírt körének sugara r, a kör középpontja K, ennek és a tetraéder negyedik csúcsának távolsága pedig m. Az ADK háromszög a tetraéderek szimmetriája miatt mindkét esetben derékszögű, ezért Pitagorasz tétele szerint $m^2 = AD^2 - r^2$. Pontosan akkor létezik tetraéder, ha $m > 0$, azaz $AD > r$ teljesül. Ismert, hogy ha egy szabályos háromszög oldalának hossza h, akkor a háromszög körülírt körének sugara $h\sqrt{3}/3$. Tehát az első esetben mindig létezik tetraéder, mert $b > a$ miatt $b > a\sqrt{3}/3$ mindig teljesül, a második esetben pedig pontosan akkor van ilyen tetraéder, ha $a > b\sqrt{3}/3$, azaz $a\sqrt{3} > b$ fennáll.

A harmadik esetben először megkeressük azt az a/b arányt, amikor a tetraéder négyszöggé fajul, azaz csúcsai egy síkba esnek. Ekkor az $ABDC$ négyszög oldalainak és átlóinak hosszát is ismerjük (*3. ábra*). Mivel megfelelő oldalaik hossza megegyezik, ezért a CAB és ABD háromszögek egybevágó egyenlőszárú háromszögek. Ebből következik, hogy C-nek az AB szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó tükörképe D, és ezért az $ABDC$ négyszög szimmetrikus trapéz.



3. ábra

Ha tehát $ABC\sphericalangle = \alpha$, akkor

$$ACB\sphericalangle = BAD\sphericalangle = BDA\sphericalangle = \alpha \quad \text{és} \quad CAB\sphericalangle = ABD\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha.$$

A trapéz alapjainak párhuzamossága miatt $ABC\sphericalangle$ és $DCB\sphericalangle$ váltószögek, és így $DCA\sphericalangle = DCB\sphericalangle + BCA\sphericalangle = 2\alpha$. Az ADC és a BCD háromszögek is egybevágó egyenlő szárú háromszögek, vagyis $DAC\sphericalangle = DCA\sphericalangle = 2\alpha$. Az ABC háromszögben a szögek összegét felírva kapjuk, hogy

$$180^\circ = ABC\sphericalangle + BCA\sphericalangle + (BAD\sphericalangle + DAC\sphericalangle) = \alpha + \alpha + (\alpha + 2\alpha) = 5\alpha,$$

amiből kapjuk, hogy $\alpha = 36^\circ$. Ebből következik, hogy $DCA\sphericalangle = 72^\circ$ és $ADC\sphericalangle = 36^\circ$.

Ha az $ABDC$ trapéz átlóinak metszéspontja M, akkor $MD = MC$, továbbá

$$AMC\sphericalangle = 180^\circ - (BCA\sphericalangle + DAC\sphericalangle) = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ.$$

Tehát az AMC háromszög is egyenlő szárú, $MC = AC = a$, és a szögek egyezősége miatt hasonló az ADC háromszöghöz. Ezért a két háromszögben a megfelelő oldalak aránya megegyezik, vagyis

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AM} = \frac{AC}{AD - MD} = \frac{AC}{AD - MC}, \quad \text{azaz} \quad \frac{b}{a} = \frac{a}{b-a}.$$

Ebből rendezés után

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} - 1 = 0.$$

A másodfokú egyenletet megoldva és figyelembe véve, hogy $b/a > 1$, kapjuk hogy

$$\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Számolásunkból a szinusztételt és a megfelelő addíciós tételt alkalmazva következik, hogy

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 2\cos 36^\circ,$$

ebből pedig kapjuk, hogy

$$\sin 36^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4},$$

amiket a későbbiekben használni fogunk.

Megmutatjuk, hogy pontosan akkor létezik a harmadik esetben leírt tetraéder, ha

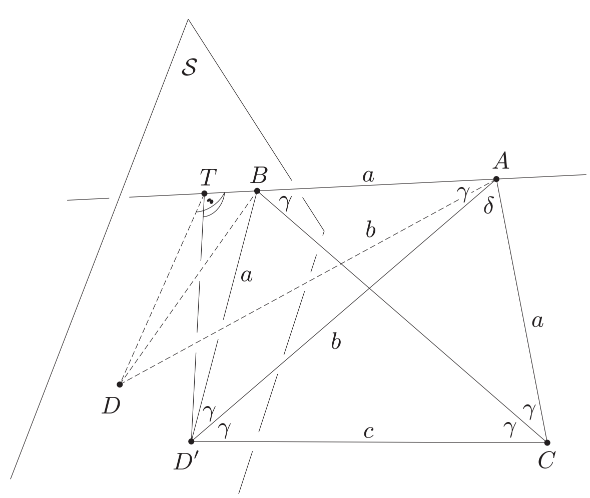
$$1 < \frac{b}{a} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ha létezik tetraéder, akkor a D csúcs nincs benne az ABC síkban. Forgassuk el a tetraéder ABD lapját az AB egyenes körül úgy, hogy a D csúcs D' képe az ABC síkba kerüljön. Ekkor $ABD'C$ szimmetrikus trapéz, mert az ABD' és ABC háromszögek egybevágó egyenlőszárú háromszögek (*4. ábra*). Legyen $\gamma = ABC\sphericalangle = ACB\sphericalangle = BAD'\sphericalangle = BD'A\sphericalangle$. Mivel az AB egyenes körül forgatunk, ezért a forgatás során a D pont egy olyan $\mathcal{S}$ síkban mozog, mely merőleges az AB egyenesre. Ezért az AB-vel párhuzamos CD' egyenes is merőleges $\mathcal{S}$-re. Ez viszont azt jelenti, hogy $\mathcal{S}$-nek a C-hez legközelebbi pontja D', tehát $b = CD > CD' = c$. Mivel bármely háromszögben igaz, hogy nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, ezért ekkor

$$\delta = D'AC\sphericalangle < ACD'\sphericalangle = ACB\sphericalangle + BCD'\sphericalangle = ACB\sphericalangle + ABC\sphericalangle = 2\gamma.$$

Vagyis az ABC háromszögben a szögek összegére kapjuk, hogy $180^\circ = \delta + 3\gamma < 5\gamma$, tehát $36^\circ < \gamma$. Ezért a szinusztétel alapján

$$\frac{b}{a} = \frac{AD'}{AC} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin\gamma} = 2\cos\gamma < 2\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$



4. ábra

Megfordítva, ha $1 < \dfrac{b}{a} < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ teljesül, akkor legyen D' az ABC sík azon pontja, melyre $ABD'C$ szimmetrikus trapéz. A $b > a$ feltételből következik, hogy az AB felezőmerőlegese által meghatározott két félsík közül B és D' az egyikben, A és C pedig a másikban van. Jelölje γ és δ ugyanazokat a szögeket, mint az előző bekezdésben. Az ABC egyenlőszárú háromszögből kapjuk, hogy

$$\cos\gamma = \frac{\frac{BC}{2}}{AB} = \frac{b}{2a}.$$

Tehát

$$\frac{1}{2} < \cos\gamma < \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad \text{azaz} \quad 60^\circ > \gamma > 36^\circ.$$

Ezért

$$D'AC\sphericalangle = \delta = 180^\circ - 3\gamma < 72^\circ < 2\gamma = D'CA\sphericalangle.$$

S mivel bármely háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van, ezért $CD' < AD' = b$.

Ha a D'-ből az AB egyenesre állított merőleges talppontja T, akkor

$$D'T = b\sin\gamma > b\sin 36^\circ = b\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Forgassuk az ABD' háromszöget az AB egyenes körül valamelyik irányban. A forgatás során D' egy olyan T középpontú körvonalon mozog, melynek síkja merőleges az AB egyenesre és a CD' távolság nyilván folytonosan változik. Amikor az elforgatás szöge éppen 180°, azaz a D' pont átkerül D'-nek az AB egyenesre vonatkozó D'' tükörképébe, akkor a $CD'D''$ derékszögű háromszögből kapjuk, hogy

$$CD'' > D'D'' = 2D'T > b\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} > b.$$

Ezért a forgatás során lesz egy olyan helyzet, amikor D' képének és C-nek a távolsága b. Az ehhez a helyzethez tartozó $ABCD$ tetraéder eleget tesz a feltételeknek.

A két tetraéder egybevágósága pontosan akkor következik a feladat feltételeiből, ha a három eset közül csak az egyikben leírt tetraéder valósítható meg. Mivel az első esethez tartozó tetraéder minden $b > a$ értékre létezik, ezért azt kell megnéznünk, hogy a másik két eset mikor nem építhető meg. A létezés feltétele a második esetben $b/a < \sqrt{3}$, a harmadikban pedig $b/a < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Mivel $\sqrt{3} > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, ezért a két tetraéder egybevágóságának feltétele a $b/a \geq \sqrt{3}$ egyenlőtlenség teljesülése.