

I. megoldás. Az ABC , KCF , CKI , HLA , EAL , BDJ és JGB háromszögek egybevágóak, hiszen két azonos hosszúságú oldaluk egyenlő szöget zár be. (Például $LE = HA = CA$, $AE = AB$, valamint

$$\begin{aligned} HAE\angle &= 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - CAB\angle = \\ &= 180^\circ - CAB\angle, \end{aligned}$$

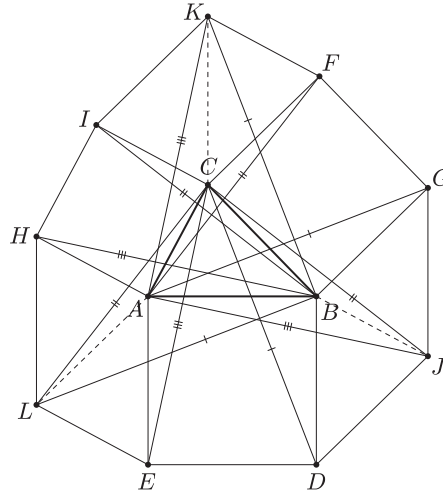
tehát

$$LEA\angle = 180^\circ - HAE\angle = CAB\angle.$$

A többi háromszögre is hasonlóan bizonyítható.) Az ábrán az egyvonalas, a kétvonalas, illetve a háromvonalas szakaszok páronként megkaphatóak egymásból egy valamelyik oldal hosszával, arra merőlegesen való eltolásból, illetve máshogy párosítva 90° -os elforgatással. Például

$$FCK\triangle \cong CBA\triangle, \quad KCF\angle = ABC\angle \quad \text{és} \quad FC \perp CB,$$

ezért az FCK háromszöget 90° -os forgatás viszi a CBA háromszögbe, vagyis $CK \perp BA$ és egyenlő vele. Hasonlóan $LA \perp BC$ és $LA = BC$, valamint $JB \perp AC$ és $JB = AC$. Mindebből következik, hogy $CK \parallel BD$ és $CK = BD$, vagyis $DBKC$ paralelogramma, így $DC = BK$. Hasonlóan $LB = AG$, $LC = AF$, $BI = JC$, $JA = BH$, $EC = AK$. Másrészt $ABG\triangle \cong KCB\triangle$, mert három oldaluk egyenlő. Mivel $AB \perp KC$, így a két háromszög 90° -os forgatással megkapható egymásból, így $AG \perp KB$ is teljesül. Hasonlóan látható be a többi szakaszra is a merőlegesség.



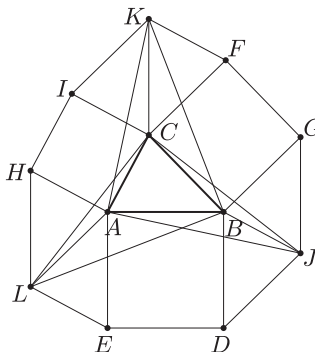
Ezekből következik, hogy $AKB\angle = JAG\angle$ (háromvonalas–egyvonalas szög). Ugyanígy $BLC\angle = GAF\angle$ (egyvonalas–kétvonalas szög), valamint $CJA\angle = FAK\angle$ (kétvonalas–háromvonalas szög).

Tehát $AKB\angle + BLC\angle + CJA\angle = JAG\angle + GAF\angle + FAK\angle = JAK\angle$, ami két háromvonalas szakasz által bezárt szög, melyek egymásból 90° -os elforgatással kaphatók, tehát $JAK\angle = 90^\circ$.

Ezzel az állítást beláttuk.

Megjegyzések: 1. A B -nél lévő egyvonalas, illetve a C -nél lévő kétvonalas 90° -os szögbe ugyanígy átforgathattuk volna a három szöget. 2. Hasonlóan belátható, hogy $ECD\angle = JAG\angle$ és $IBH\angle = FAK\angle$, amiből látszik, hogy a feladat ekvivalens egy könnyebben megfogalmazható állítással: Ha egy tetszőleges ABC háromszögre kifele $ABDE$, $BCFG$ és $CAHI$ négyzeteket rajzolok, akkor $FAG\angle + HBI\angle + ECD\angle = 90^\circ$.

II. megoldás. $BDJ\triangle \cong ABC\triangle$, mert D -nél és B -nél ugyanakkora szögek vannak és $AB = BD$, illetve $BC = DJ$. Hasonlóan $BDJ\triangle \cong CKI\triangle \cong HLA\triangle \cong ABC\triangle$. Ezért $AL = a$, $BJ = b$ és $CK = c$.



$BJC\triangle \cong ACL\triangle$, mert $BJ = AC$, $BC = AL$ és $JBC\angle = \gamma + 90^\circ = LAC\angle$. Hasonlóan $ABL\triangle \cong CKB\triangle$ és $ABJ\triangle \cong KCA\triangle$.

A bizonyítás további részében irányított szögekkel számolunk. Az eddigiekből következik, hogy

$$\begin{aligned} BLC\angle + AKB\angle + CJA\angle &= \\ &= BLA\angle + ALC\angle + AKC\angle + CKB\angle + CJB\angle + BJA\angle = \\ &= KBC\angle + BCJ\angle + JAB\angle + ABL\angle + LCA\angle + CAK\angle. \end{aligned}$$

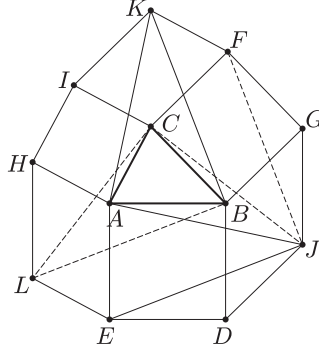
Tekintsük az AKB , a BLC és a CJA háromszögek belső szögeinek összegét:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 180^\circ &= BAK\angle + AKB\angle + KBA\angle + BLC\angle + LCB\angle + CBL\angle + \\ &\quad + CJA\angle + JAC\angle + ACJ\angle = \\ &= (AKB\angle + BLC\angle + CJA\angle) + (\alpha + CAK\angle) + (\beta + KBC\angle) + \\ &\quad + (\gamma + LCA\angle) + (\beta + ABL\angle) + (\alpha + JAB\angle) + (\gamma + BCJ\angle) = \\ &= (AKB\angle + BLC\angle + CJA\angle) + (2\alpha + 2\beta + 2\gamma) + \\ &\quad + (CAK\angle + KBC\angle + LCA\angle + ABL\angle + JAB\angle + BCJ\angle) = \\ &= (AKB\angle + BLC\angle + CJA\angle) + 2 \cdot 180^\circ + (AKB\angle + BLC\angle + CJA\angle). \end{aligned}$$

Tehát $180^\circ = 2(AKB\angle + BLC\angle + CJA\angle)$, azaz $90^\circ = AKB\angle + BLC\angle + CJA\angle$, és ezt kellett bizonyítani.

Megjegyzés. Nagyon sok megoldó az ábra miatt olyan következtetésre jutott, ami általános háromszögre nem teljesül. Ezt esetszétválasztással vagy irányított szögek használatával lehetett kiküszöbölni.

III. megoldás. Egy $\vec{v}$ vektor 90° -kal való elforgatottját jelölje $\vec{v}'$, egy P pontét pedig P' .



Ekkor

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{CF} = \\ &= -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{BC'}, \end{aligned}$$

amiből

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AK}' &= (-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{BC'})' = \\ &= (-\overrightarrow{CA})' + (\overrightarrow{CA'})' + (\overrightarrow{BC'})' = \\ &= -\overrightarrow{CA'} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

Felírható, hogy $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'}$.

Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$, és így

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})' = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} = \vec{0}' = \vec{0},$$

így $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} = -\overrightarrow{CA'}$ és $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$, tehát $\overrightarrow{AK}' = \overrightarrow{AJ}$. Tehát a K pont A körüli -90° -os elforgatottja a J pont, a B pont elforgatottja az E pont, ezért az $AKB\triangle$ elforgatottja az $AJE\triangle$. Emiatt $AKB\angle = AJE\angle$.

Hasonlóan belátható, hogy a $BLC\triangle$ C körüli $+90^\circ$ -os elforgatottja az $FJC\triangle$, ami miatt $BLC\angle = FJC\angle$.

Tehát $AKB\angle + BLC\angle + CJA\angle = AJE\angle + FJC\angle + CJA\angle = FJE\angle$. Erről kéne belátni, hogy 90° . Mivel $\overrightarrow{JE} = \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DE}$, így

$$\overrightarrow{JE}' = (\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DE})' = (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{DE})' = \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{DE}' = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{JG} = \overrightarrow{JF}.$$

Tehát az F pont az E pont J körüli -90° -os elforgatottja. Ezzel beláttuk, hogy $FJE\angle = 90^\circ$, a bizonyítást befejeztük.