

2. feladat. Nemlineáris dinamika elektromos áramkörökben

A rész. Stacionárius állapotok és instabilitások

A.1. A kért adatok a grafikonról leolvashatók:

$$R_{be} = 1,00 \, \Omega,$$

$$R_{ki} = 10,0 \, \Omega,$$

$$I_0 = 6,00 \, \text{A},$$

$$R_k = 2,00 \, \Omega.$$

A.2. Az áramkörre felírva a huroktörvényt:

$$\mathcal{E} = IR + U, \quad \text{amiből} \quad I = \frac{\mathcal{E} - U}{R}.$$

Az áramkör stacionárius állapotait ennek az egyenesnek és az áramkör $I-U$ karakterisztikájának metszéspontjai adják meg.

$R = 3,00 \, \Omega$ esetében mindig 1 metszéspont van,

$R = 1,00 \, \Omega$ esetében pedig $\mathcal{E}$ értékétől függően 1, 2 vagy 3 metszéspont lehetséges.

A.3. A stacionárius megoldás a középső ágra esik, így használhatjuk az arra vonatkozó összefüggést:

$$I_{st} = \frac{\mathcal{E} - R_k I_0}{R - R_k} = 3,00 \, \text{A},$$

$$U_{st} = R_k(I_0 - I_{st}) = 6,00 \, \text{V}.$$

A.4. A huroktörvény alapján:

$$\mathcal{E} = RI + U_X + L \frac{dI}{dt} = RI + R_k(I_0 - I) + L \frac{dI}{dt},$$

amiből

$$L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E} - R_k I_0 - (R - R_k)I.$$

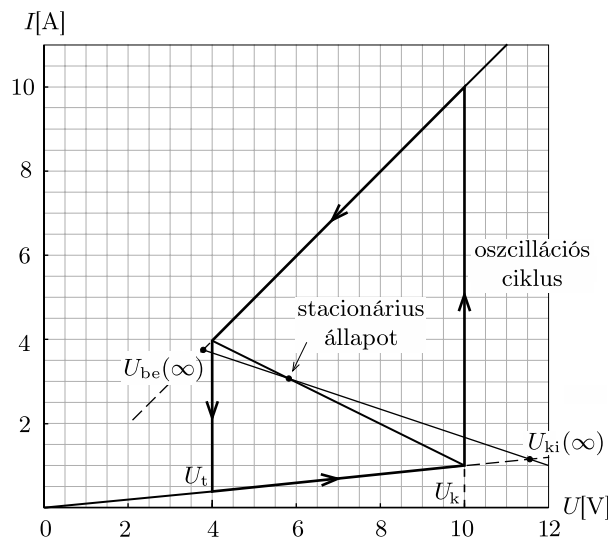
Eszerint,

ha $I > I_{st}$, akkor $dI/dt < 0$, azaz az áramerősség csökken,

ha $I < I_{st}$, akkor $dI/dt > 0$, azaz az áramerősség nő, tehát a stacionárius állapot stabil.

B rész. Bistabil, nemlineáris áramköri elemek a fizikában: rádióadó

B.1. Az oszcilláció a 4. ábrán látható.



4. ábra

A versenyzőktől a következő magyarázatokat várták el (a maximális pontszámhoz ezek közül legalább hármat):

1. A feszültség az ugrás közben állandó, mert a kondenzátor feszültsége nem változhat pillanatszerűen.
2. A közbülső ág nem lehet része az oszcillációs ciklusnak, mert az ottani állapotok stabilak.

3. Azért történnek ugrások az $I-U$ karakterisztika töréspontjainál, mert ezekben a pontokban nincs más lehetősége a rendszernek.
4. A rendszer a bekapcsolt ágon balra mozog, mert így közelít a stacionárius állapothoz (amely azonban nem része az $I-U$ grafikonnak).
5. A rendszer a kikapcsolt ágon jobbra mozog, mert így közelít a stacionárius állapothoz (amely azonban nem része az $I-U$ grafikonnak).

B.2. Mivel a nemlineáris áramköri elem a bekapcsolt ág és a kikapcsolt ág között ugrál, a feszültsége ilyen alakban írható fel: $U_X = R_{\text{be/ki}} I_X$. Az áramkör mindkét ágon soros RC -körként viselkedik C kapacitással és

$$\frac{R_{\text{be/ki}} R}{R_{\text{be/ki}} + R}$$

ellenállással (hiszen az R ellenállás és az X elem párhuzamosan vannak kötve). Az áramkör időtényezője:

$$\tau_{\text{be/ki}} = \frac{R_{\text{be/ki}} R}{R_{\text{be/ki}} + R} C.$$

Ha a be- vagy a kikapcsolt ágot a töréspontokon túl is meghosszabbítanánk, akkor az áramkör hosszú idő után a stacionárius állapotba érkezne, és a feszültsége

$$U_{\text{be/ki}}(\infty) = \frac{R_{\text{be/ki}}}{R_{\text{be/ki}} + R} \mathcal{E}$$

lenne.

A nemlineáris elemen eső feszültség az állandósult állapot $U_{\text{be/ki}}(\infty)$ feszültségének és az exponenciálisan lecsengő feszültségtagnak az összege:

$$U_X(t) = U_{\text{be/ki}}(\infty) + [U_{\text{be/ki}}(0) - U_{\text{be/ki}}(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau_{\text{be/ki}}}}.$$

A rendszer által a bekapcsolt ágon töltött idő (egy ciklusban):

$$t_{\text{be}} = \tau_{\text{be}} \ln \frac{U_k - U_{\text{be}}(\infty)}{U_t - U_{\text{be}}(\infty)} = 2,41 \cdot 10^{-6} \text{ s},$$

a kikapcsolt ágon töltött idő pedig

$$t_{\text{ki}} = \tau_{\text{ki}} \ln \frac{U_{\text{ki}}(\infty) - U_t}{U_{\text{ki}}(\infty) - U_k} = 3,67 \cdot 10^{-6} \text{ s}.$$

Az oszcilláció teljes periódusideje tehát: $T = t_{\text{be}} + t_{\text{ki}} = 6,08 \cdot 10^{-6} \text{ s}$.

B.3. Hanyagoljuk el a kikapcsolt ágon felhasznált energiát! A bekapcsolt ágon felhasznált energiát közelítsük a következőképp:

$$E \approx \frac{1}{R_{\text{be}}} \left(\frac{U_t + U_k}{2} \right)^2 t_{\text{be}} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$$

A teljesítmény ebből (közelítőleg):

$$P = \frac{E}{T} \approx 20 \text{ W}.$$

B.4. A rádiójel hullámhossza: $\lambda = cT = 1,82 \cdot 10^3 \text{ m}$. Az antenna optimális hossza $\lambda/4$ (vagy $3\lambda/4$, $5\lambda/4$, stb.) A feltételeknek megfelelő egyetlen lehetséges választás: $s = \lambda/4 = 456 \text{ m}$.

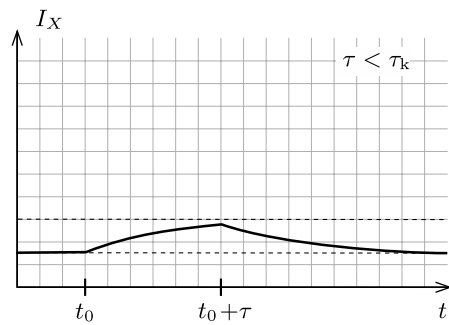
C rész. Bistabil, nemlineáris áramköri elemek a biológiában: neurisztor

C.1. Ha a telep feszültsége $\mathcal{E}' = 12,0 \text{ V}$, az állandósult állapot a kikapcsolt ágon lesz:

$$U' = \frac{R_{\text{ki}}}{R + R_{\text{ki}}} \mathcal{E}' = 9,23 \text{ V}.$$

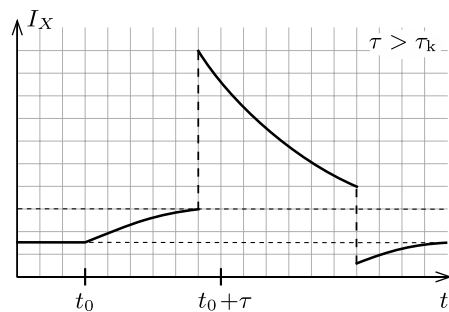
Ha a telep feszültségét ismét $\mathcal{E} = 15,0 \text{ V}$ értékre növeljük, akkor a rendszer állapota elkezd jobbra mozogni a kikapcsolt ágon (ugyanúgy, mint a **B** részben).

Ha a telep feszültsége még azelőtt újra lecsökken, hogy az elem feszültsége eléri a küszöbfeszültséget, akkor a rendszer egyszerűen visszamegy a stacionárius állapotba. Az X áramköri elem áramának időfüggését az 5. ábrán vázoltuk.



5. ábra

Ha viszont az elem feszültsége eléri a küszöbfeszültséget, akkor a rendszer felugrik a bekapcsolt ágra, és végigjár *egy* teljes oszcillációs ciklust (hiszen $\tau < T$), mielőtt visszaérkezik a stacionárius állapotba. Az X áramkörü elem áramának időfüggése vázlatosan a 6. ábrán látható.



6. ábra

C.2. A kritikus idő a küszöbfeszültség eléréséhez szükséges idő (amit a **B.2** részben megismert módon számíthatunk ki):

$$\tau_k = \tau_{ki} \ln \frac{U_{ki}(\infty) - U'}{U_{ki}(\infty) - U_k} = 9,36 \cdot 10^{-7} \text{ s.}$$

C.3. Mivel $\tau > \tau_k$, a rendszer végrehajt egy oszcillációt, tehát az áramkör ilyenkor neurisztor.