

1. feladat. Két mechanikai probléma

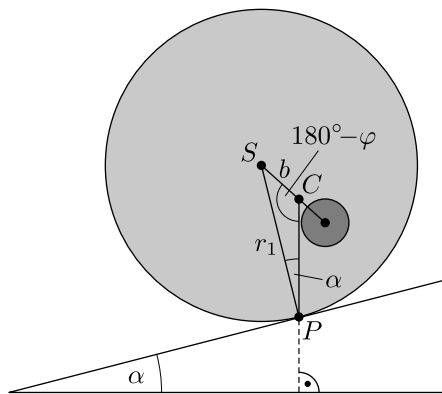
A rész. Elrejtett korong

A.1. Egyensúlyban a testre ható erők és forgatónyomatékok eredője nulla. Az utóbbi feltétel a lejtővel való P érintkezési pontra nézve úgy teljesíthető, ha a rendszer C tömegközéppontja éppen a P pont felett helyezkedik el (1. ábra). Alkalmazzuk a PCS háromszögre a szinusztételt:

$$\frac{\sin(180^\circ - \varphi)}{\sin \alpha} = \frac{r_1}{b},$$

ebből

$$b = \frac{r_1 \sin \alpha}{\sin \varphi}.$$



1. ábra

A.2. A korong φ szögkitérésekor a nehézségi erő forgatónyomatéka $Mgb \sin \varphi$, iránya pedig olyan, hogy a kitérést csökkenteni igyekszik. A forgómozgás egyenlete tehát a következő alakot ölti:

$$\Theta_S \ddot{\varphi} = -Mgb \sin \varphi.$$

Kis szögekre $\sin \varphi \approx \varphi$, így egy harmonikus rezgőmozgás (fizikai inga) mozgásegyenletét kapjuk:

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi, \quad \text{ahol} \quad \omega = \sqrt{\frac{Mgb}{\Theta_S}}.$$

A rezgés periódusideje a körfrekvenciával $T = 2\pi/\omega$ kapcsolatban áll, így a tehetetlenségi nyomaték kifejezhető:

$$\Theta_S = \frac{T^2}{4\pi^2} Mgb.$$

A.3. Gondolkozhatunk úgy, hogy egy ϱ_1 sűrűségű, r_1 sugarú tömör (tehát lyuk nélküli) korong és egy $\varrho_2 - \varrho_1$ sűrűségű, r_2 sugarú korong közös tömegközéppontjának helyét kell meghatároznunk. A távolságokat a nagyobb korong S középpontjától mérve a tömegközéppont helyét megadó egyenlet:

$$b = \frac{(\varrho_2 - \varrho_1)r_2^2\pi h_2}{M}d, \quad \text{amiből} \quad d = \frac{Mb}{(\varrho_2 - \varrho_1)r_2^2\pi h_2}.$$

A.4. Egy m tömegű, r sugarú korong tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{2}mR^2$. Ennek és a Steiner-tételnek a felhasználásával írhatjuk, hogy

$$\Theta_S = \underbrace{\frac{1}{2}\varrho_1 r_1^4 \pi h_1}_{\text{nagy korong}} + \underbrace{(\varrho_2 - \varrho_1)r_2^2\pi h_2 \left(\frac{r_2^2}{2} + d^2 \right)}_{\text{kis korong a Steiner-tétellel}}.$$

A d -re az előző részfeladatban kapott eredményt felhasználva:

$$\Theta_S = \frac{1}{2}\varrho_1 r_1^4 \pi h_1 + \frac{1}{2}(\varrho_2 - \varrho_1)r_2^4 \pi h_2 + \frac{M^2 b^2}{(\varrho_2 - \varrho_1)r_2^2 \pi h_2}.$$

A.5. Írjuk fel a teljes rendszer tömegét:

$$M = \varrho_1 r_1^2 \pi h_1 + (\varrho_2 - \varrho_1)r_2^2 \pi h_2.$$

Ebből kifejezhetjük a $(\varrho_2 - \varrho_1)r_2^2\pi h_2$ tagot, és beírhatjuk az **A.4.** részfeladat végeredményébe. A Θ_S -re korábban kapott formulát is felhasználva:

$$\frac{T^2}{4\pi^2}Mgb = \frac{1}{2}\varrho_1 r_1^4 \pi h_1 + \frac{1}{2}(M - \varrho_1 r_1^2 \pi h_1)r_2^2 + \frac{M^2 b^2}{M - \varrho_1 r_1^2 \pi h_1}.$$

Ebből kifejezhető r_2 :

$$r_2 = \sqrt{\frac{2}{M - \varrho_1 r_1^2 \pi h_1} \left(\frac{T^2}{4\pi^2}Mgb - \frac{M^2 b^2}{M - \varrho_1 r_1^2 \pi h_1} - \frac{1}{2}\varrho_1 r_1^4 \pi h_1 \right)}.$$

Ennek ismeretében az össztömegből h_2 megkapható:

$$h_2 = \frac{M - \varrho_1 r_1^2 \pi h_1}{(\varrho_2 - \varrho_1)r_2^2 \pi}.$$

B rész. Forgó űrállomás

B.1. A forgó űrhajó padlóján álló, m tömegű testre az $mR\omega_0^2$ centrifugális erő hat. Ez akkor egyezik meg a test mg_F földi súlyával, ha az űrállomás szögsebessége $\omega_0 = \sqrt{g_F/R}$.

B.2. Egy rugón rezgő test körfrekvenciája $\omega_F = \sqrt{k/m}$.

B.3. Az űrhajón a mesterséges gravitáció egyenesen arányos a forgástengelytől mért távolsággal: $g(r) = r\omega_0^2$. A rugóra akasztott testet az egyensúlyi helyzetéből sugárirányban kifelé x távolsággal kitérítve, arra nemcsak a rugóerő növekménye, hanem az effektív gravitációs tér megváltozásából származó erő is hat:

$$-kx + m\omega_0^2 x = m\ddot{x},$$

ami éppen olyan, mint egy $k^* = k - m\omega_0^2$ effektív direkciós erejű rugón rezgő test mozgásegyenlete, a rezgés körfrekvenciája tehát $\omega = \sqrt{k/m - \omega_0^2}$.

B.4. Az M_F tömegű, R_F sugarú Föld felszíne felett h magasságban a gravitációs gyorsulás:

$$g_F(h) = \gamma \frac{M_F}{(R_F + h)^2} = \gamma \frac{M_F}{R_F^2} \left(1 + \frac{h}{R_F}\right)^{-2} = g_F(0) \left(1 + \frac{h}{R_F}\right)^{-2}.$$

Mivel $h/R_F \ll 1$, alkalmazhatjuk a kis ε mennyiségekre érvényes $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ lineáris közelítést:

$$g_F(h) \approx g_F(0) \left(1 - \frac{2h}{R_F}\right).$$

A földi gravitációs mezőben tehát az egyensúlyi helyzetéből x távolságra kitérített test mozgásegyenlete

$$-kx + mg_F \frac{2x}{R_F} = m\ddot{x},$$

amiből a rezgés körfrekvenciája

$$\widetilde{\omega}_F = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2g_F}{R_F}}.$$

B.5. Az előző két részfeladat eredményéből látszik, hogy ω és $\widetilde{\omega}_F$ akkor egyezik meg, ha $\omega_0^2 = 2g_F/R_F$. A **B.1.** kérdés eredményét felhasználva ez azt jelenti, hogy az űrállomás sugarának hossza éppen a fűldsugár fele: $R = R_F/2$.

B.6. A feladat megoldható inerciarendszerben is, ehelyett mi most a rövidebb, forgó koordináta-rendszerbeli leírást választjuk. A $H \ll R$ magasságból elengedett test „függőlegesen lefelé” (azaz sugárirányban kifelé) mutató sebessége t idejű esés után jó közelítéssel $v_y = R\omega_0^2 t$. Az emiatt „vízszintes” (érintő-)irányban ható Coriolis-erő nagysága tehát $F_C = 2mv_y\omega_0 = 2mR\omega_0^3 t$, a gyorsulás pedig F_C/m . A v_x vízszintes sebességkomponenst az idő függvényében ennek a gyorsulásnak az integrálásával lehet meghatározni:

$$v_x(t) = \int_0^t 2R\omega_0^3 t' dt' = R\omega_0^3 t^2.$$

Behelyettesítve az esés $T = \sqrt{2H/(R\omega_0^2)}$ idejét, megkapjuk a vízszintes sebességkomponenst a becsapódáskor:

$$v_x = 2H\omega_0.$$

A vízszintes elmozdulást a $v_x(t)$ függvény integrálja adja meg:

$$d_x(t) = \int_0^t v_x(t') dt' = \frac{1}{3}R\omega_0^3 t^3.$$

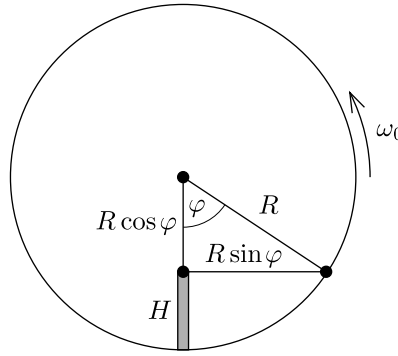
A $t = T$ helyettesítéssel kapjuk meg a teljes vízszintes elmozdulást:

$$d_x = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8H^3}{R}}.$$

B.7. A mozgást inerciarendszerből a legegyszerűbb leírni. A $H = R(1 - \cos \varphi)$ magasságú toronyból a test $\omega_0 R \cos \varphi$ kezdősebességgel érintőirányban indul (2. ábra), és egyenes vonalú egyenletes mozgással halad egészen az űrállomás padlójáig. A mozgás ideje:

$$t = \frac{R \sin \varphi}{\omega_0 R \cos \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\omega_0}.$$

A test akkor érkezik éppen a torony aljához, ha ezalatt az idő alatt az űrállomás éppen φ szöggel fordul el, azaz $t = \varphi / \omega_0$. Az időre kapott két egyenlet összevetéséből a $\varphi = \operatorname{tg} \varphi$ egyenletet kapjuk. Ennek végtelen sok megoldása van: az első a triviális $\varphi = 0$, a többi pedig csak numerikusan határozható meg. A következő gyök $3\pi/2$ körüli érték, ami a nem releváns $H > R$ eredményre vezet. Az $5\pi/2$ környékén lévő harmadik gyök az, amit keresünk. Zsebszámológéppel a pontosabb $\varphi \approx 7,725$ radián értéket kaphatjuk. Ennek a szögnek a felhasználásával meghatározhatjuk a torony magasságát: $H \approx 0,871 R$.



2. ábra

B.8. Mivel az y irányú Coriolis-erőt elhanyagolhatjuk, ebben az irányban a test harmonikus rezgőmozgást végez d amplitúdóval. A kezdeti feltételeket is figyelembe véve: $y(t) = -d \cos \omega t$. Az y irányú sebességre ennek deriválásával $v_y(t) = d\omega \sin \omega t$ értéket kapunk, amellyel az x irányú Coriolis-erő (az űrállomás szögsebességvektorát a papír síkjába befelé mutatónak választva):

$$F_x(t) = -2mv_y(t)\omega_0 = -2m\omega_0 d\omega \sin \omega t.$$

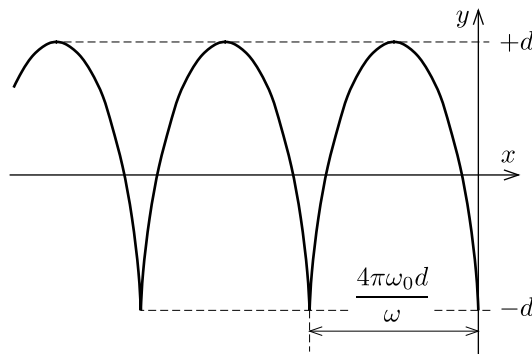
A test gyorsulása x irányban tehát éppen olyan, mint egy harmonikus oszcillátoré. Az x irányú elmozdulást a gyorsulás kétszeri integrálásával kapjuk:

$$x(t) = \frac{2\omega_0 d}{\omega} \sin \omega t + c_1 t + c_2,$$

ahol c_1 és c_2 integrálási állandók. A $t = 0$ időpillanatban a test x irányú sebessége és x koordinátája is nulla, ebből $c_1 = -2\omega_0 d$ és $c_2 = 0$ adódik, tehát:

$$x(t) = \frac{2\omega_0 d}{\omega} (\sin \omega t - \omega t).$$

A pálya vázlatos rajza a 3. ábrán látható.



3. ábra