

**Megoldás.** Legyen a keresett összeg  $S$ , és jelöljük a táblázatba írt számokat az  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$  betűkkel a következő *ábra* szerint:

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $i$ |

Ha összeadjuk a  $2 \times 2$ -es négyzeteken belüli összegeket, akkor a sarokmezőkbe írt számokat egyszer számoljuk, a középső mezőbe írtat négyszer, a fennmaradó négy mezőbe írt számokat pedig kétszer. Mivel az összes szám összege  $1 + 2 + \dots + 9 = 45$ , ezért  $4S = 45 + 3e + (b + d + f + h)$ . Mivel a  $b, d, e, f, h$  számok az  $\{1, 2, \dots, 9\}$  halmaz különböző elemei, ezért

$$3e + (b + d + f + h) = 2e + (b + d + e + f + h) \geq 2 \cdot 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 17,$$

hiszen  $e \geq 1$  és a  $(b + d + e + f + h)$  összeg legalább akkora, mint az öt legkisebb elem összege. Így  $4S \geq 45 + 17 = 62$ , és ezért  $S \geq 16$ , hiszen  $S$  egész.

Most tekintsünk egy olyan kitöltött táblázatot, amely teljesíti a feltételt, és mindegyik  $2 \times 2$ -es négyzetben a számok összege  $S$ . Cseréljük le minden  $x$  elemét  $10 - x$ -re, ekkor a táblázatba írt számok ugyancsak  $10 - 9 = 1, 10 - 8 = 2, \dots, 10 - 1 = 9$  lesznek. Sőt, így is fennáll, hogy bármely  $2 \times 2$ -es részben a számok összege azonos: értéke  $40 - S$ , hiszen ha az  $x, y, z, t$  számok voltak eredetileg valamely  $2 \times 2$ -es részben, ahol  $x + y + z + t = S$ , akkor helyükre  $10 - x, 10 - y, 10 - z, 10 - t$  kerül, ezek összege pedig  $40 - (x + y + z + t) = 40 - S$ . Tudjuk, hogy bármely megfelelő táblázatban  $S \geq 16$ , így mivel az előbbi cserével is olyan táblázathoz jutunk, amelyben a  $2 \times 2$ -es részek összege ugyanannyi, ezért  $40 - S \geq 16$  is fennáll. Tehát  $16 \leq S \leq 24$ , vagyis  $S$  értéke csak a  $[16, 24]$  intervallumba eső egész szám lehet. Ezek az értékek valóban lehetségesek, amint azt a következő kitöltések mutatják:

|   |   |   |
|---|---|---|
| 8 | 4 | 9 |
| 3 | 1 | 2 |
| 5 | 7 | 6 |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 8 | 2 | 5 |
| 6 | 1 | 9 |
| 7 | 3 | 4 |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 7 | 2 | 9 |
| 5 | 4 | 3 |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 7 | 3 | 9 |
| 4 | 5 | 2 |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 7 | 6 | 1 |
| 3 | 4 | 9 |
| 8 | 5 | 2 |

Ez az 5 táblázat az  $S = 16, 17, 18, 19, 20$  értékekre mutat példát. A fent említett cserével ezekből az ezeket 40-re kiegészítő értékekre, azaz  $S = 24, 23, 22, 21$  esetén is megfelelő táblázat kapható. Tehát a  $2 \times 2$ -es résztáblázatokban a számok összege  $16, 17, \dots, 24$  lehet.