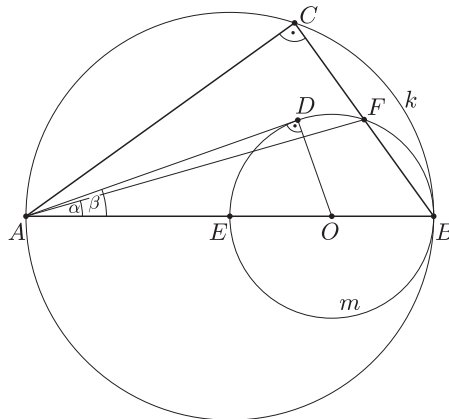


I. megoldás. Legyen az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának felezőpontja E , BC befogójának felezőpontja F , a befogóhoz tartozó súlyvonalnak és az AB átfogónak a szöge α , az AB átfogó Thalész-köre k , ennek a B középpontú, $1/2$ arányú középpontos hasonlóságnál kapott képe pedig az m kör. Ekkor m az EB szakasz Thalész-köre, középpontja az AB szakasz B -hez legközelebbi O negyedelőpontja (1. ábra).

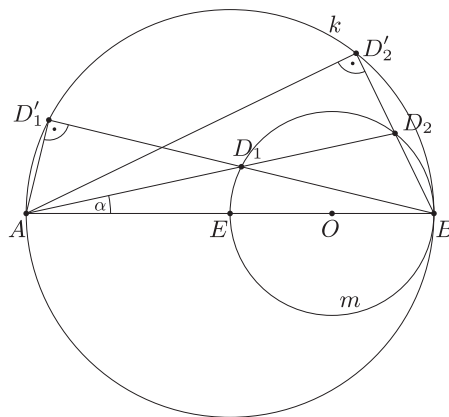


1. ábra

Az F pont felezi BC -t és C rajta van k -n, ezért F rajta van m -en, tehát az AF egyenesnek és m -nek van közös pontja. Így α legfeljebb akkora, mint az A -ból m -hez húzott AD érintő és AB által bezárt β szög. Ezt a szöveget az AOD derékszögű háromszögből határozhatjuk meg.

$$\sin \beta = \frac{OD}{OA} = \frac{\frac{1}{4}AB}{\frac{3}{4}AB} = \frac{1}{3}, \quad \text{azaz} \quad \beta = \arcsin \frac{1}{3} \approx 19,47^\circ.$$

Megmutatjuk, hogy minden $0^\circ < \alpha \leq \arcsin \frac{1}{3}$ esetén van olyan derékszögű háromszög, melyben az átfogó és az egyik befogóhoz tartozó súlyvonal szöge α . Ha a feltétel teljesül, akkor az AB egyenes egyik oldalára felmérve az α szöveget, annak AB -től különböző szára metszi m -et a D_1 és D_2 pontokban, illetve érinti m -et D -ben, ha $\alpha = \arcsin \frac{1}{3}$ (2. ábra). Mivel D_i rajta van m -en, azért ha B -ből kétszeresére nagyítjuk, akkor a kapott D'_i pont rajta lesz m kétszeresre nagyított képén, k -n, azaz az AB szakasz Thalész-körén. Ezért ha $i = 1, 2$, akkor az ABD'_i háromszög derékszögű, és a BD'_i befogójához tartozó AD_i súlyvonala α szöveget zár be az átfogójával.



2. ábra

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, legyen továbbá $AB = 2$, $BC = 2a$, $AC = 2b$ és $AF = s$. Az ABC és AFC háromszögek derékszögűek, ezért Pitagorasz tétele szerint $4 = 4a^2 + 4b^2$, illetve $s^2 = a^2 + 4b^2$, amikből kapjuk, hogy

$$(1) \quad s^2 = 1 + 3b^2, \quad \text{szóval} \quad s = \sqrt{1 + 3b^2}, \quad \text{valamint} \quad s^2 - a^2 = 4b^2.$$

Az α szög koszinuszát az ABF háromszög BF oldalára felírt koszinusztételből kifejezve, majd (1)-et felhasználva kapjuk, hogy

$$\cos \alpha = \frac{AB^2 + AF^2 - BF^2}{2 \cdot AB \cdot AF} = \frac{4 + s^2 - a^2}{4s} = \frac{1 + b^2}{\sqrt{1 + 3b^2}}.$$

A 2 átfogójú ABC derékszögű háromszög befogója $2b$, ezért b tetszőleges 0 és 1 közti értéket felvehet, így feladatunkat visszavezettük a $(0; 1)$ intervallumon értelmezett

$$f(b) = \frac{1 + b^2}{\sqrt{1 + 3b^2}}$$

függvény értékkészletének meghatározására. Az f függvényt ugyanezzel a képlettel definiálhatjuk az összes valós számon. Az így kiterjesztett függvény nyilván folytonos az egész számegyenesen, és ezért

$$\lim_{b \rightarrow 0} f(b) = f(0) = 1, \quad \text{valamint} \quad \lim_{b \rightarrow 1} f(b) = f(1) = 1$$

teljesül. A függvénynek a $(0; 1)$ intervallumon lévő minimumát kisebb átalakítás után a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget felhasználva határozzuk meg.

$$\begin{aligned} \frac{1 + b^2}{\sqrt{1 + 3b^2}} &= \frac{\frac{1}{3}(1 + 3b^2) + \frac{2}{3}}{\sqrt{1 + 3b^2}} = \frac{\sqrt{1 + 3b^2}}{3} + \frac{2}{3\sqrt{1 + 3b^2}} \geq \\ &\geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{1 + 3b^2}}{3} \cdot \frac{2}{3\sqrt{1 + 3b^2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

A függvény a $(0; 1)$ intervallumon csak 1-nél kisebb értékeket vesz fel, mert ha $0 < b < 1$, akkor $b^4 < b^2$ miatt $(1 + b^2)^2 = 1 + 2b^2 + b^4 < 1 + 3b^2$, tehát $1 + b^2 < \sqrt{1 + 3b^2}$, és ezért $f(b) < 1$. Így a $(0; 1)$ intervallumon értelmezett f függvény értékkészlete a $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1\right)$ intervallum. Ezért α minden olyan hegyesszöget felvesz, amelyre $\frac{2\sqrt{2}}{3} \leq \cos \alpha < 1$ teljesül.

Tehát egy derékszögű háromszög átfogója és az egyik befogóhoz tartozó súlyvonala által bezárt szög tetszőleges 0° -nál nagyobb, de $\arccos \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 19,47^\circ$ -nál nem nagyobb értéket felvehet.