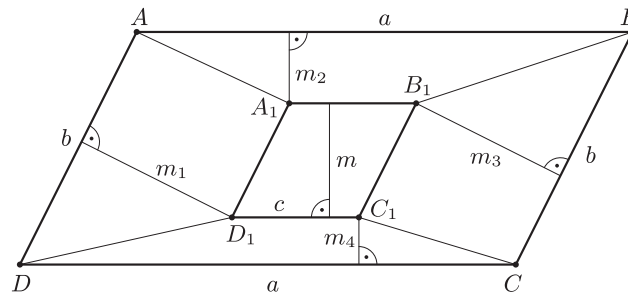


Megoldás. A feladat feltételei alapján az $A_1B_1C_1D_1$ rombusz oldalai párhuzamosak az $ABCD$ paralelogramma oldalaival. Használjuk az 1. ábra jelöléseit és legyen $T_{ADD_1A_1} = T_1$, $T_{ABB_1A_1} = T_2$, $T_{BCC_1B_1} = T_3$, $T_{CDD_1C_1} = T_4$, valamint m_a és m_b a paralelogramma megfelelő magasságai, T pedig a területe.



1. ábra

Ekkor $T_1 + T_3 = T_2 + T_4$ pontosan akkor teljesül, ha

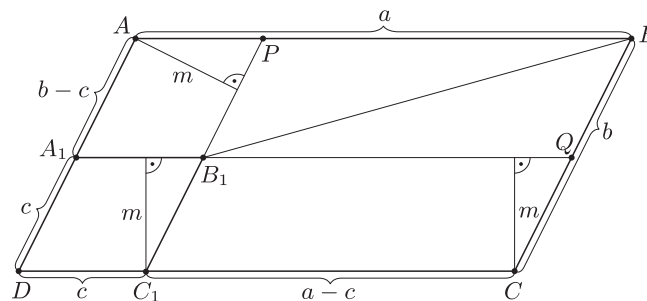
$$\frac{(c+b)}{2}m_1 + \frac{(c+b)}{2}m_3 = \frac{(c+a)}{2}m_2 + \frac{(c+a)}{2}m_4,$$

vagyis

$$\begin{aligned} \frac{(c+b)}{2}(m_1 + m_3) &= \frac{(c+a)}{2}(m_2 + m_4), \quad \text{azaz} \\ (c+b)(m_b - m) &= (c+a)(m_a - m). \end{aligned}$$

Ez ekvivalens a $cm_b + T - bm = cm_a + T - am$ egyenlőséggel. Ebből következik, hogy a szemközti területek összegének egyenlősége nem függ a rombusz helyzetétől.

Helyezzük a rombuszt a paralelogramma D csúcsához úgy, hogy $D = D_1$ legyen (2. ábra).



2. ábra

Ekkor az ABB_1A_1 és BCC_1B_1 trapézok területének egyenlőségét kell vizsgálni.

Húzzuk be a BPB_1Q paralelogramma BB_1 átlóját. Ez felezi a paralelogramma területét, tehát elegendő az APB_1A_1 és QCC_1B_1 paralelogrammák területének egyenlőségét vizsgálni:

$$T_{APB_1A_1} = (b-c) \cdot m \quad \text{és} \quad T_{QCC_1B_1} = (a-c) \cdot m.$$

Így a két terület pontosan akkor egyenlő, ha $(b-c) = (a-c)$, vagyis ha $a = b$. Tehát az $ABCD$ paralelogramma pontosan akkor rombusz, ha $T_1 + T_3 = T_2 + T_4$.