

**Megoldás.** Megmutatjuk, hogy biztosan létezik ilyen  $n$ . Ha  $n = 1$  és  $n = 2$  közül egyik sem megfelelő, akkor  $\alpha - \beta$  és  $\alpha^2 - \beta^2$  egész számok. Mivel  $\alpha - \beta \neq 0$ , ezért  $\alpha + \beta = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}$  racionális szám, és így az

$$\alpha = \frac{(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)}{2} \quad \text{és a} \quad \beta = \frac{(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)}{2}$$

számok is racionálisak. Mivel  $\alpha$  és  $\beta$  különbsége egész, ezért egyszerűsítés utáni alakjukban a nevező ugyanaz: legyen  $\alpha = \frac{a}{c}$  és  $\beta = \frac{b}{c}$ , ahol  $a, b, c$  olyan egész számok, amelyekre  $(ab, c) = 1$ . Az  $\alpha^n - \beta^n$  szám pontosan akkor egész, ha  $c^n$  osztja az

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

számot. Az  $n = 1$  esetből  $c \mid a - b$  adódik, vagyis  $a$  és  $b$  azonos maradékot adnak  $c$ -vel osztva. Mivel  $\alpha$  és  $\beta$  közül legalább az egyik nem egész, ezért  $|c| \neq 1$ , vagyis a  $c$  egész számnak létezik  $p$  prímosztója. Mivel  $c \mid a - b$ , ezért  $a \equiv b \pmod{p}$ , és így

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1} \equiv na^{n-1} \pmod{p}.$$

Mivel  $(ab, c) = 1$ , ezért  $p \nmid a$ . Így, ha az  $n$  szám nem osztható  $p$ -vel, akkor abból, hogy  $c^n \mid a^n - b^n$  az is következik, hogy  $p^n \mid a - b$ -nek is teljesülnie kell, hiszen az  $a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}$  összegnek nem osztója  $p$ . Elég tehát mutatni egy olyan  $n$  pozitív egész számot, amelyre  $p \nmid n$  és  $p^n \nmid a - b$ . Mivel  $a - b$  egy 0-tól különböző egész szám, ezért ilyen  $n$  nyilvánvalóan létezik: például  $n = p \mid a - b \mid + 1$  megfelelő. (Ugyanis ezzel a választással  $|a - b| < n < p^n$ , így mindkét feltétel teljesülése könnyen ellenőrizhető.) Vagyis biztosan létezik olyan  $n$ , amelyre  $\alpha^n - \beta^n$  nem egész.