

I. megoldás. Azt fogjuk belátni, hogy pontosan az 1 és a prímszámok a baljósak, az összetett számok pedig a szerencsések. Az 1 nyilvánvalóan baljós. Ha pedig n prímszám, és az első n számot $d \geq 2$ egyenlő elemszámú részre osztjuk, akkor $d \mid n$ miatt csak $d = n$ lehetséges, vagyis minden szám egy külön csoportba kerül, ekkor viszont a csoportokon belüli összegek nem egyeznek.

Most tegyük fel, hogy n összetett szám. Ha $2 < n$ páros, akkor n darab kételemű csoportot hozhatunk létre, amelyek mindegyikében $n + 1$ az összeg: $(1, n); (2, n - 1); \dots; \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\right)$. Tehát a 2-nél nagyobb páros számok szerencsések.

Végül, tegyük fel, hogy az n összetett szám páratlan. Legyen a legkisebb prímosztója p . Mivel n összetett, ezért n/p egy 1-nél nagyobb egész szám, így p definíciója miatt $p \leq n/p$. Mivel n páratlan, ezért n/p is az, vagyis $n = p(p + 2k)$, ahol k nemnegatív egész szám. Megmutatjuk, hogy az első n pozitív egész számot szét lehet osztani p egyforma méretű csoportba úgy, hogy mindegyik csoporton belül ugyanannyi az elemek összege. Először osszuk be az $1, 2, \dots, p^2$ számokat. Ehhez írjuk őket egy $p \times p$ -es táblázat mezőibe úgy, hogy az i -edik sor j -edik eleme $(i - 1)p + j$ legyen. Azt állítjuk, hogy ha a beosztásnál minden csoportba minden sorból és minden oszlopból pontosan egy elem kerül, akkor olyan p elemű csoportokat hozunk létre, amelyekben az elemek összege $(0 + 1 + \dots + (p - 1))p + (1 + 2 + \dots + p)$. Legyen ugyanis S egy tetszőlegesen kiválasztott csoport. Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{(i-1)p+j \in S} (i-1)p+j &= \sum_{(i-1)p+j \in S} (i-1)p + \sum_{(i-1)p+j \in S} j = \\ &= (0+1+\dots+(p-1))p + (1+2+\dots+p), \end{aligned}$$

ahol az első összeg kiszámításánál azt használtuk, hogy S minden sorból, a másodiknál pedig azt, hogy S minden oszlopból pontosan egy elemet tartalmaz. Továbbá a kívánt beosztás megvalósítható, például úgy, ha az egyik csoportot a főátlón lévő számok $(1, p+2, 2p+3, \dots, (p-1)p+p)$ alkotják, a többi pedig ennek „eltoltjai”. Be kell még osztanunk a $p^2+1, p^2+2, \dots, p^2+2kp$ számokat. Ehhez először képezzünk belőlük kp darab párt: x párja legyen $2p^2+2kp+1-x$, vagyis a párok: $(p^2+1, p^2+2kp); (p^2+2, p^2+2kp-1); \dots; (p^2+kp, p^2+kp+1)$. Az első p^2 pozitív egész előbbi csoportokba osztását egészítsük ki úgy, hogy mindegyikhez hozzáveszünk k darab párt. Így egyrészt minden csoportban ugyanannyi lesz az elemek összege, másrészt a csoportok elemszáma is egyezni fog: $p+2k$ lesz. Ezzel beláttuk, hogy a páratlan összetett számok is szerencsések.

A baljós évek tehát az első és a prímszám sorszámú évek.

II. megoldás (annak igazolására, hogy a páratlan összetett számok szerencsések). Tegyük fel, hogy n páratlan összetett szám. Legyen $n = ab$, ahol a és b 1-nél nagyobb páratlan számok. Mivel b páratlan, így $b \geq 3$. Először 1-től $3a$ -ig a darab hármas csoportba osztjuk a számokat. Legyen $a = 2l + 1$. Tekintsük a következő beosztást:

$$\begin{aligned} &(1, 3l+2, 6l+3); (2, 3l+3, 6l+1); \dots; (l+1, 4l+2, 4l+3); \\ &(l+2, 2l+2, 6l+2); (l+3, 2l+3, 6l); \dots; (2l+1, 3l+1, 4l+4). \end{aligned}$$

Mindegyik csoportban az összeg $9l+6$. Ha $b = 3$, akkor készen vagyunk, hiszen $a > 1$ darab hármas csoportba osztottuk a számokat, amelyekben az összeg egyenlő. Ha $b > 3$, akkor $3a+1$ -től n -ig osszuk a számokat $\frac{b-3}{2} \cdot a$ darab kettes csoportba az alábbi módon:

$$(3a+1, ab), (3a+2, ab-1), \dots, \left(3a + \frac{b-3}{2} \cdot a, ab+1 - \frac{b-3}{2} \cdot a\right).$$

Mindegyik kettes csoportban az összeg $ab+3a+1$. Az első n pozitív egész számot most úgy osztjuk a csoportba, hogy minden csoport az egyik hármas és $\frac{b-3}{2}$ darab kettes csoport uniója legyen. Ekkor a csoportok száma $a > 1$, a csoportok mérete b , továbbá bármely két csoportban ugyanannyi az összeg, hiszen azok hármas és kettes részcsoportjait „párosíthatjuk”, és azokban az összeg egyenlő.