

Megoldás. Legyen az AC szakasz felezőpontja F_{AC} , a BD szakaszé F_{BD} . A paralelogramma-tétel miatt:

$$\begin{aligned} 2PA^2 + 2PC^2 &= AC^2 + 4PF_{AC}^2, \\ 2PB^2 + 2PD^2 &= BD^2 + 4PF_{BD}^2. \end{aligned}$$

A feladatban szereplő egyenlőség tehát pontosan akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned} AC^2 + 4PF_{AC}^2 &= BD^2 + 4PF_{BD}^2, \\ AC^2 - BD^2 &= 4PF_{BD}^2 - 4PF_{AC}^2, \\ PF_{BD}^2 - PF_{AC}^2 &= \frac{AC^2 - BD^2}{4}. \end{aligned}$$

Az $\frac{AC^2 - BD^2}{4}$ konstans, jelöljük c -vel. Helyezzük el az F_{AC} és F_{BD} pontokat egy koordináta-rendszerbe, $F_{AC}(0, 0, 0)$ és $F_{BD}(a, 0, 0)$. Legyenek P koordinátái (x, y, z) . Ekkor $PF_{AC}^2 = x^2 + y^2 + z^2$ és $PF_{BD}^2 = (x - a)^2 + y^2 + z^2$. Az egyenletünk:

$$\begin{aligned} (x - a)^2 + y^2 + z^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= c, \\ -2ax + a^2 &= c, \\ x &= \frac{a^2 - c}{2a}. \end{aligned}$$

Ez egy síknak az egyenlete, amely merőleges az x tengelyre, vagyis az $F_{AC}F_{BD}$ egyenesre. Az $ABCD$ tetraéder körülírt gömbjének középpontján nyilván átmegy, mert itt $PA = PB = PC = PD$, tehát a feltétel triviálisan igaz. Így a feladatban szereplő mértani hely a tetraéder körülírt gömbjének középpontján átmenő, az $F_{AC}F_{BD}$ egyenesre merőleges sík.