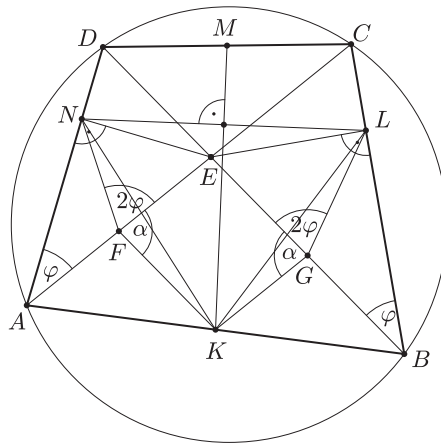


I. megoldás. Legyen az AE szakasz felezőpontja F , a BE szakaszé pedig G . Az ANE és BLE háromszögek derékszögűek, ezért az AE , illetve EB átmérőjű Thalész-körök ezen háromszögek köré írható körei, középpontjaik F és G . Emiatt $AF = FE = FN$ és $BG = GE = GL$.

Az $ABCD$ húrnégyszög, ezért $\angle CBD = \angle CAD = \varphi$, mivel a CD ívhez tartozó kerületi szögek. Így az előbbi derékszögű háromszögekben a középponti és kerületi szögek összefüggését felhasználva $\angle NFE = 2\varphi$ és $\angle EGL = 2\varphi$ (1. ábra).



1. ábra

Az ABE háromszögben KF és KG középvonalak, ezért az $EFKG$ négyszög paralelogramma, így szemközti szögei egyenlők: $\angle EFK = \angle KGE = \alpha$.

Mivel $KG = FE = FN$ és $KF = GE = GL$, azért $\triangle NFK \cong \triangle KGL$, mivel két oldaluk és a közbezárt szög megegyezik. Tehát $NK = KL$, vagyis az LNK háromszög egyenlő szárú, így NL alapjának felezőmerőlegese átmegy a K ponton.

Hasonló gondolatmenettel belátható, hogy az LNK háromszög is egyenlő szárú, és NL alapjának felezőmerőlegese átmegy az M ponton.

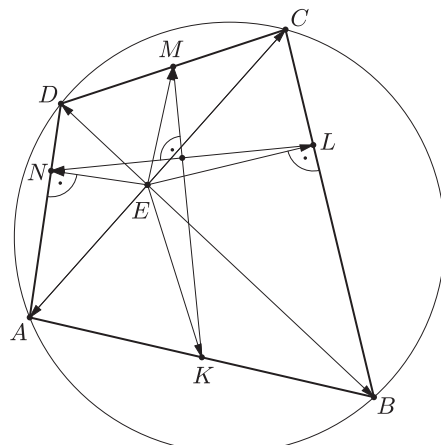
Beláttuk, hogy az LN szakasz felezőmerőlegese átmegy K és M pontokon is, vagyis KM valóban merőleges az NL szakaszra, sőt még felezi is.

Az ábrán $\angle CBD$ és $\angle CAD$ hegyesszögek. Ilyenkor L és N pontok a BC és AD szakaszok belső pontjai. Ha a két szög tompaszög lenne, akkor ezek a pontok az AD és BC szakaszok meghosszabbításán keletkező külső pontok lennének, de a gondolatmenet változatlanul működik.

Ha a két szög derékszög, akkor a pontok a CD szakasz Thalész-körén lesznek rajta, azaz L és N megegyezik az A és B pontokkal. Ekkor KM egyenes a Thalész-kör átmérője, ami áthalad NL , azaz AB húr felezőpontján, ezért éppen a húr felezőmerőlegese.

II. megoldás. Dolgozzunk vektorokkal! Legyen E az origó, a négy csúcsba mutató vektor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ (2. ábra). M helyvektora $\frac{\mathbf{c} + \mathbf{d}}{2}$ és K helyvektora $\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$, tehát

$$\overrightarrow{KM} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{d}}{2} - \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} = \frac{\mathbf{d} - \mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{2}.$$



2. ábra

Az EN egyenes irányvektora az $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d} - \mathbf{a}$ vektor 90° -os elforgatottja, az EL egyenesé pedig a $\overrightarrow{CB} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$ vektoré. $(\mathbf{d} - \mathbf{a})$ 90° -os elforgatottját jelölje $(\mathbf{d} - \mathbf{a})^{90}$. Mindkettőt pozitív irányba forgatjuk.)

$$\overrightarrow{LN} = \overrightarrow{EN} - \overrightarrow{EL} = \alpha \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{a})^{90} - \beta \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c})^{90} = \alpha \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{a})^{90} + \beta \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b})^{90},$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tehát ha $\alpha = \beta$, akkor az $\overrightarrow{LN}$ vektor valóban merőleges az $\overrightarrow{KM}$ vektorra.

Azt kell tehát még belátnunk, hogy az EN és EL távolságok úgy aránylanak egymáshoz, mint a négyszög AD és CB oldalai.

Mivel $ABCD$ húrnégyszög, $\angle EDA = \angle BCE$ és $\angle EAD = \angle CBE$, valamint nyilván $\angle AED = \angle CEB$. Így EDA háromszög hasonló ECB -hez, vagyis

$$\alpha = \frac{EN}{AD} = \frac{EL}{CB} = \beta,$$

tehát igaz az arányokra vonatkozó állítás.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.