

Megoldás. Alkossák a H halmazt a K sokszöglemez S síkjának mindazon pontjai, amelyek véges sok, a K oldalegyenesekre végzett tükrözés egymásutánjával K -ba vihetők. A mi feladatunk a $H = S$ egyenlőség igazolása. Világos, hogy $K \subseteq H$, továbbá a konstrukció folytán H tükrös K minden oldalegyenesére. Legyen $\mathcal{E}$ a H tükrötengelyeinek halmaza. Világos, hogy ha $t_1, t_2 \in \mathcal{E}$ és t'_1 a t_1 tükrképe t_2 -re, akkor $t'_1 \in \mathcal{E}$, ahol azaz H tükrös minden olyan egyenesre is, amelyet H egy tükrötengelyének a H egy másik tükrötengelyére való tükrözésével kapunk.

Mivel $K \subseteq H$, ezért H tükrörszimmetriái folytán K -nak minden olyan K' képe is H -ban fekszik, amit K -ból $\mathcal{E}$ -beli egyenesekre vonatkozó tükrözések egymásutánjával kapunk. Ráadásul az így kapható K' sokszögek minden oldalegyenese $\mathcal{E}$ -beli, azaz a H egy tükrötengelye.

Jelölje $r \geq 0$ esetén K^r az S sík azon pontjait, amelyek legfeljebb r távolságra vannak a K sokszöglemeztől. Megmutatjuk, hogy $K^r \subseteq H$ teljesül alkalmas $r > 0$ esetén. Válasszunk egy olyan $R > 0$ számot, amelyre a K csúcsai köré írt R sugarú körlemezek mindegyikének a K -val vett metszete körcikk. Egy ilyen R sugarú körcikk tükrképe a körcikket határoló sugár egyenesére H -ban fekszik, hiszen a tükrözés tengelyére H szimmetrikus. Sőt: ha a tükrképként kapott körcikket tükrözzük egy azt határoló sugár egyenesére, akkor az így kapott kép is H -ban marad, és ugyanez az így kapott tükrképek tükrképeire is igaz. Ezért a K csúcsai köré írt R sugarú körlemezek mindegyike része H -nak. Tekintsük a K sokszöglemeznek, a K csúcsai köré írt R sugarú köröknek és a K -nak a K oldalegyenesekre vett tükrképeinek K^* unióját. Könnyen látható, hogy van olyan $r > 0$ szám, amelyre $K^r \subseteq K^*$ teljesül, tehát alkalmas n -re

$$(1) \quad K^r \subseteq K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n \subseteq H,$$

ahol minden egyes K_i -t a H bizonyos tükrötengelyeire való tükrözések egymásutánjával kapunk K -ból.

Most tegyük fel, hogy $K^t \subseteq H$ valamely $t > 0$ -ra. Vegyük észre, hogy ha azokat a tükrözéseket, amelyek a K sokszöget K_i -be viszik a K helyett a K^t alakzatra végezzük el, akkor a kapott kép éppen K_i^t lesz. Vagyis ha $K^t \subseteq H$, akkor $K_i^t \subseteq H$, amiből (1) miatt

$$K^{(r+t)} \subseteq K_1^t \cup K_2^t \cup \dots \cup K_n^t \subseteq H$$

következik. Az adódott tehát, hogy ha $K^t \subseteq H$, akkor $K^{t+r} \subseteq H$. Láttuk azonban, hogy $K^r \subseteq H$, ezért $K^{2r} \subseteq H$, innen $K^{3r} \subseteq H$ stb. Így aztán

$$H \subseteq S = K^r \cup K^{2r} \cup K^{3r} \cup \dots \subseteq H$$

adódik, ahonnan $H = S$ következik, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. $\square$

Megjegyzések. 1. Úgy kaphatunk egy lehetséges másik megoldást a feladatra, ha követjük a fenti bizonyítás első két bekezdését, majd azt igazoljuk, hogy az S sík lefedhető azokkal a K -val egybevágó sokszöglemezekkel, amelyeket K -ból megkaphatunk annak az operációnak a véges sokszori alkalmazásával, amelyben egy sokszöglemezt tükrözzünk annak egy oldalegyenesére. Minden így kapott K' sokszöglemez ugyanis része H -nak, hiszen H szimmetrikus az operáció során használt tükrötengelyekre. Érdemes megfigyelni az alábbiakat. Legyen P a K sokszöglemez S síkjának egy pontja. Kössük össze P -t a K egy Q belső pontjával, és indítsunk el egy biliárdgolyót Q -ból a QP félegyenes mentén. Ha a K sokszöglemezt egy biliárdasztalnak gondoljuk, amelynek határát elérve a biliárdgolyó a fizikai törvényeknek megfelelően pattan vissza (azaz úgy, hogy a visszapattanó golyó pályáját tükrözve az éppen elért oldal egyenesére pontosan az adott oldal elérését megelőző pályaegyenes meghosszabbítását kapjuk), akkor a K sokszöglemeznek az a pontja, amelybe a biliárdgolyó $|\overline{PQ}|$ távolság megtétele után kerül, egy olyan pont lesz, amelybe P betükrözhető. Ha a feladat megoldását erre a megfigyelésre szeretnénk alapozni, akkor vizsgálni kell, mi is történik akkor, ha a biliárdgolyó az útja során K egy csúcsába jut. Nem lehetetlen ezt az esetet jól kezelni, de azt sem nehéz igazolni, hogy ilyenkor Q helyett választható K -nak egy másik Q' pontja, amelyből a golyót újtára indítva már nem ütközzünk K csúcsába. Egy másik nehézség annak igazolása, hogy bármelyik pontból bármelyik irányba is indítjuk a biliárdgolyót, az tetszőlegesen nagy távolságot meg tud tenni a K sokszöglemezen. Ennek belátását az olvasóra bizzuk.

2. Könnyen látható, hogy a feladatban nem lényeges feltétel a K sokszöglemez konvex volta. Tekintsük ugyanis K összes oldalegyenesét. Ezek a síkot konvex tartományokra bontják fel. A konstrukcióból adódóan minden ilyen tartomány vagy része K -nak vagy diszjunkt K belsejétől. Tekintsünk egy K -ban elhelyezkedő, konvex K' tartományt. A K' minden oldalegyenese egyúttal oldalegyenese K -nak is, ezért ha a K' -re igazoltuk a feladat állítását, akkor abból azonnal következik, hogy K is rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Sőt, az is igaz, hogy K oldalegyenesekre végrehajtott tükrözések egymásutánjával K síkjának tetszőleges pontja a K -nál szűkebb K' konvex sokszöglemez belsejébe vagy határára tükrözhető.