

Megoldás. Jelöljük q -val annak a valószínűségét, hogy a bolha visszajut a 0-ba. A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy pozitív irányba indul el. Jelöljük r -rel annak a valószínűségét, hogy az 1-ből eljut a 0-ba, ha az 1-re a 2-ből érkezett.

Ha $p = 1$, akkor $q = 0$, biztos, hogy a bolha nem tér vissza a 0-ba.

Tegyük fel mostantól, hogy $p \neq 1$. Az első ugrás után feltevésünk szerint a bolha az 1-ben van, innen $1 - p$ valószínűséggel egyből visszaugrik a 0-ba, p valószínűséggel pedig tovább a 2-re. Utóbbi esetben annak a valószínűsége, hogy a bolha visszatér az 1-be, szintén q . Ilyenkor az 1-be a 2-ből érkezik, így annak a valószínűsége, hogy ezután eljut a 0-ba r . Ezért az alábbi egyenlet írható fel:

$$(1) \quad q = (1 - p) + pqr.$$

Most keressünk ehhez hasonló egyenletet r -re is. Miután az 1-be a 2-ből érkezett, p valószínűséggel továbbugrik a 0-ba, $1 - p$ valószínűséggel pedig visszaugrik a 2-re. Innen az előzőekhez hasonlóan q valószínűséggel jut vissza az 1-re és onnan r valószínűséggel jut el a 0-ba, ezért

$$(2) \quad r = p + (1 - p)qr.$$

A két egyenletet összeadva

$$r + q = qr + 1,$$

amiből átrendezés és szorzattá alakítás után a

$$0 = (1 - q)(1 - r)$$

összefüggést kapjuk. Ez az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $r = 1$ vagy $q = 1$. Ha $r = 1$, akkor (2)-be behelyettesítve

$$1 = p + (1 - p)q,$$

és így

$$(1 - p)(1 - q) = 0.$$

Mivel $p \neq 1$, azért $q = 1$, vagyis $q = 1$ -nek mindenképpen teljesülnie kell.

Tehát ha $p \neq 1$, akkor 1 valószínűséggel visszajut a 0-ba, $p = 1$ esetén viszont biztos, hogy nem jut vissza.