

Megoldás. Jelöljük az ingák hosszát ℓ -lel, a testek tömegét M -mel és m -mel. Feltételezzük, hogy mindkét golyó mérete sokkal kisebb, mint a fonalak hossza, emiatt a matematikai inga közelítés alkalmazható.

Az a) esetben a testek ugyanabban a függőleges síkban mozognak. Mivel az ütközési pontig mindkét test

$$h = \ell(1 - \cos 30^\circ) = 0,134 \ell$$

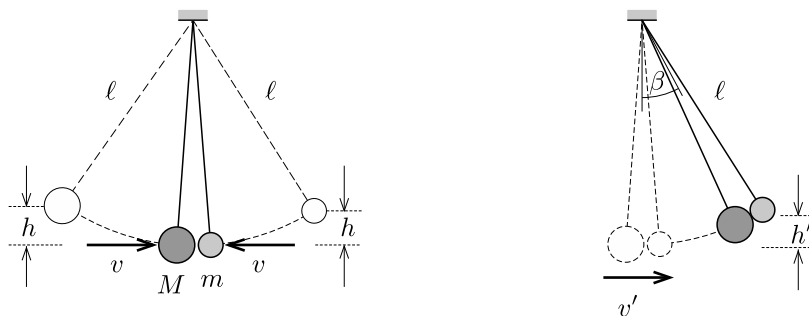
távolsággal kerül mélyebbre, a sebességük az ütközés előtt (az energiamegmaradás törvénye szerint)

$$v = \sqrt{2gh},$$

a rugalmatlan ütközés után pedig (a lendületmegmaradás törvénye alapján)

$$v' = \frac{M - m}{M + m}v = 0,733 v$$

lesz (1. ábra).



1. ábra

Ekkora kezdősebességgel a két összetapadt test

$$h' = \frac{v'^2}{2g} = \ell(1 - \cos \beta)$$

magasra emelkedik, ahonnan a legnagyobb kilendülésük szöge

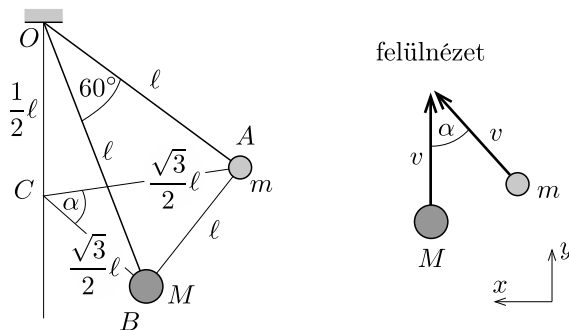
$$\beta = \arccos\left(1 - \frac{v'^2}{v^2} \frac{h}{\ell}\right) = \arccos(1 - 0,733^2 \cdot 0,134) = 21,9^\circ.$$

A b) esetben a kitérített ingák mozgásának OBC és OAC síkja nem esik egybe, hanem valamekkora α szöget zár be egymással (2. ábra). Mivel az ingák kezdeti kitérítése 60° volt, az ABC egyenlő szárú háromszög szárainak hossza:

$$AC = CB = \ell \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \ell.$$

Másrészt a kitérített ingák fonalai egymással is 60° -os szöget zárnak be, így OAB egyenlő oldalú háromszög, tehát $AB = \ell$. Az ABC háromszögre felírható koszinusztételből következik, hogy

$$\cos \alpha = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot CB \cdot AC} = \frac{1}{3}, \quad \text{vagyis} \quad \alpha = 70,5^\circ.$$



2. ábra

Mindkét golyó

$$v = \sqrt{2g\ell(1 - \cos 60^\circ)} = \sqrt{g\ell}$$

nagyságú, egymással α szöget bezáró sebességgel érkeznek a felfüggesztési pont alá, ott rugalmatlanul ütköznek, majd egy közös, v' nagyságú sebességgel mozognak tovább. A lendületmegmaradás törvénye szerint a közös sebesség x és y komponense (a 2. ábrán látható koordináta-rendszerben):

$$v'_x = \frac{mv \sin \alpha}{M + m}, \quad v'_y = \frac{Mv + mv \cos \alpha}{M + m},$$

a nagysága pedig:

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = \frac{\sqrt{M^2 + m^2 + \frac{2}{3}Mm}}{M + m}v = 0,92 \sqrt{g\ell}.$$

A két test kezdősebessége és a legnagyobb kilendülésük β szöge között fennáll, hogy

$$\frac{1}{2}v'^2 = g\ell(1 - \cos \beta),$$

vagyis

$$\beta = \arccos \left(1 - \frac{0,92^2}{2} \right) = 54,7^\circ.$$