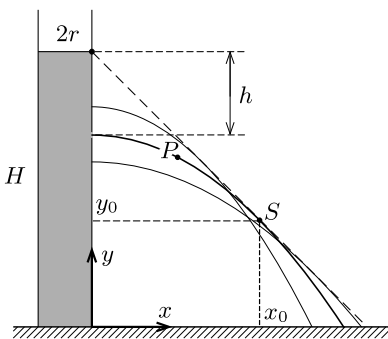


**I. megoldás.** A kiáramló vízugarak burkolófelülete a henger tengelyére nézve forgásszimmetrikus felület. Tekintsük ennek a felületnek egy, a henger tengelyére illeszkedő síkmetszetét (1. ábra), és használjuk az ábrán látható koordináta-rendszert!



1. ábra

Keressünk összefüggést egy adott  $H - h$  magasságból kiinduló vízugar tetszőleges  $P$  pontjának  $(x, y)$  koordinátái között! Ehhez vizsgáljuk a vízugar mozgását a  $P$  pontig! A kiáramló víz egy kicsiny darabkájának („vízcseppjének”) kezdősebessége a Torricelli-féle kiáramlási törvény szerint:  $v = \sqrt{2gh}$ , a  $P$  pontig tehát ez a vízcsepp

$$t = \frac{x}{\sqrt{2gh}}$$

idő alatt érkezik el. Ennyi idő alatt a vízcsepp függőleges irányban  $\frac{g}{2}t^2$  távolságnyt esik, tehát a  $P$  pontban

$$y = H - h - \frac{g}{2}t^2 = H - h - \frac{g}{2} \frac{x^2}{2gh},$$

így a  $P$  pont derékszögű koordinátái között fennáll az

$$x^2 = 4h(H - h - y)$$

összefüggés.

Keressük meg ezek után egy adott  $y_0$  magasságban azt a pontot, amelyhez tartozó vízugaraknak megfelelő  $x$  koordináta a lehető legnagyobb. A maximális  $x = x_0$  megadja a burkolófelület  $y = y_0$ -lal jellemzett  $S$  pontjának másik koordinátáját. Teljes négyzetté alakítással:

$$x^2 = 4h(H - h - y_0) \equiv -[2h - (H - y_0)]^2 + (H - y_0)^2 \leq (H - y_0)^2 \equiv x_0^2,$$

vagyis  $H - y_0 = x_0$ .

A burkolófelület (az ábrán szaggatott vonallal jelölt) alkotójának egyenlete ezek szerint  $x + y = H$ . Az alkotók tehát  $45^\circ$ -os szöget zárnak be a vízszintes talajjal, és az alkotók együttesen csonkakúpot formáznak. A csonkakúp fedőkörének sugara a henger  $r$  sugarával egyezik meg, az alapkörének sugara pedig  $r + H$ .

**II. megoldás.** Az I. megoldás jelöléseit használva a víz felszínétől  $h$  távolságban lévő lyukból kiinduló vízugar egyenlete:

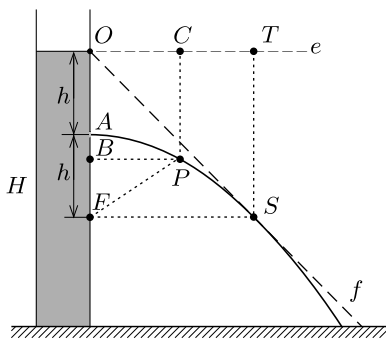
$$H - y = \frac{x^2}{4h} + h.$$

Alkalmazzuk a számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$\frac{x^2}{4h} + h \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{4h} \cdot h} = x.$$

A vízugarak által elért pontokra tehát fennáll a  $H - y \geq x$  egyenlőtlenség. A vízugarak burkolófelülete ezek szerint egy olyan csonkakúp, amelynek alkotói  $45^\circ$ -os szöget zárnak be a vízszintessel, felső körlapja pedig éppen a víz felszínének magasságában van, és a mérete is megegyezik a vízfelszín átmérőjével.

**III. megoldás.** Tekintsük a 2. ábrán látható  $A$  pontnál lévő lyukon kiáramló vízugarat, amelyik (a tömegpontok vízszintes hajításának parabolapályájához hasonlóan) parabola alakú ívet rajzol ki. Keressük meg ezen parabola fókuszpontját és vezéregyenését!



2. ábra

A kiáramlás  $v_0$  sebessége megegyezik azzal a sebességgel, amekkorával egy szabadon eső test  $OA = h$  távolság megtétele után rendelkezne. (Ez az energiamegmaradás törvényéből következik, hiszen egy kicsiny  $\Delta m$  tömegű vízmennyiség kifolyásakor a maradék víz helyzeti energiája éppen annyival csökken, mintha a  $\Delta m$  tömeg a víz felszínétől a kiáramlási nyílásig süllyedt volna le, és a helyzeti energia csökkenése fedezi a kiáramló víz mozgási energiáját. Az energiamegmaradás ezen esetét fogalmazzza meg a Torricelli-törvény, általánosabban pedig a Bernoulli-törvény, mindkettő szerint  $v_0 = \sqrt{2gh}$ .)

Ismert (lásd pl. a **P. 4565.** feladat megoldását a KöMaL 2014. évi 2. számában), hogy egy adott  $A$  pontból adott kezdősebességgel elhajított testek parabolapályájának fókuszpontja és az  $A$  pont távolsága *nem függ* a kezdősebesség irányától. Ha a vízszög nem vízszintesen, hanem függőlegesen felfelé indulna el az  $A$  pontból, akkor (a súrlódási veszteségeket elhanyagolva) éppen az  $O$  pontig, tehát a víz felszínéig emelkedne. Ez a (függőleges és egyenes) pálya olyan elfajult parabolának tekinthető, amelynek fókuszpontja  $O$ , tehát  $OA = h$  távol van a kiindulási ponttól.

A vízszög tényleges (vízszintesen induló) pályája olyan parabola, amelynek  $F$  fókuszpontja – a szimmetria és a hivatkozott tulajdonság miatt – éppen az  $A$  pont alatt, attól  $h$  távolságban található. A parabola szimmetriatengelye függőleges, vezéregyenes  $e$  tehát vízszintes, és  $A$ -tól  $AF = h$  távol helyezkedik el.

A parabolaív tetszőleges  $P$  pontjára fennáll, hogy  $FP = PC$  (ez a parabola geometriai definíciójából következik), és nyilván teljesül, hogy  $FP \geq BP$  (ahol  $B$  a  $P$  pont merőleges vetülete a henger palástján). Az egyenlőtlenség annál az  $S$  pontnál válik egyenlőséggé, amelyik a parabola  $F$  fókuszpontjával azonos magasságban található.

Megállapíthatjuk, hogy a különböző magasságban lévő lyukakból kiinduló vízszög minden pontja az  $O$  pontból induló,  $45^\circ$  meredekségű (az ábrán szaggatott vonallal jelölt)  $f$  egyenes *alatt* (vagy esetleg éppen azon rajta) található. A vízszög burkolófelülete tehát az  $f$  egyenes megforgatásával kapható csonkakúp.

*Megjegyzés.* A megoldás során feltételeztük, hogy a mérőhenger egy vízszintes asztalon áll, és emiatt a vízszög ívét csak az asztal fölötti térrészben vizsgáltuk. A burkolófelület teljes csonkakúpját már a mérőhenger felső felén lévő ( $h \leq H/2$ -vel jellemezhető) lyukakból kiáramló víz kirajzolja, a henger alsó felén lévő lyukakat akár el is hagyhatjuk.

Több versenyző is vizsgálta a mérőhenger alaplapja *alá* kerülő vízszögeket. (Ilyen vízszög például úgy jöhetne létre, hogy a mérőhengert egy vékony, függőleges rúd tetejére erősítjük.) Megállapították, hogy a burkolófelület ilyenkor egy csonkakúp és egy ahhoz illeszkedő forgásparaboloidból tevődik össze, az utóbbit a henger legaljánál kifolyó vízszög hozza létre.