

Fehér Zsombor megoldása. Legyen $c_j = a_j + j$. Ekkor az (i) feltétel azt mondja ki, hogy $j + 1 \leq c_j \leq j + 2015$, a (ii) feltétel pedig azt, hogy a c_j számok mind különbözőek.

Megmutatjuk, hogy a $c_1, c_2, \dots$ sorozat véges sok kivétellel minden pozitív egész számot felvesz. Tegyük fel ugyanis, hogy legalább 2016-ot nem vesz fel, és legyen t egy olyan pozitív egész, ami nagyobb ennél a 2016 számnál. Ekkor az (i) feltétel alapján a $\{c_1, c_2, \dots, c_t\}$ halmaz minden eleme az $[1, t + 2015]$ intervallumba esik, és mivel (ii) szerint t különböző elemről van szó, ezért ebből az intervallumból $\{c_1, c_2, \dots, c_t\}$ éppen 2015 pozitív egész számot nem vesz fel. Azonban feltevésünk szerint az ennél bővebb $\{c_1, c_2, \dots\}$ halmaz legalább 2016 darab t -nél kisebb pozitív egész számot nem vesz fel, ami pedig ellentmondás.

A feladatnak megfelelő b számot válasszuk meg annyinak, amennyi a $c_1, c_2, \dots$ sorozat által fel nem vett pozitív egészek száma, N pedig legyen egy olyan szám, ami nagyobb ennél a b darab kimaradó számnál. A fenti gondolatmenetből az is látható, hogy $b \leq 2015$. Az m, n pozitív egészekre a továbbiakban feltesszük, hogy $N \leq m < n$.

A feladatunk lényegében az, hogy egy $\sum a_j$ kifejezést megfelelő korlátok közé szorítsunk, ami nyilván ugyanaz, mint $\sum c_j$ megfelelő korlátok közé szorítása. Tudjuk, hogy $\{c_{m+1}, \dots, c_n\}$ minden eleme az $[m + 2, n + 2015]$ intervallumba esik, és mivel ezen intervallum $n - m + 2014$ egész számából $n - m$ van az előző halmazban, ezért 2014 egész szám marad ki. Vizsgáljuk meg közelebbről ezt a 2014 számot: ki fog derülni, hogy közülük $b - 1$ darab az $[m + 2, n + 2015]$ intervallum „elején”, 2015 - b pedig a „végén” helyezkedik el.

Mivel a $\{c_1, c_2, \dots\}$ halmaz b darab egész számot nem vesz fel az $[1, \infty)$ intervallumból, ezért a $\{c_{m+1}, c_{m+2}, \dots\}$ halmaz $b + m$ számot nem vesz fel $[1, \infty)$ -ből. Ez $c_j > j$ alapján azt jelenti, hogy a $\{c_{m+1}, c_{m+2}, \dots\}$ halmaz $b - 1$ számot nem vesz fel $[m + 2, \infty)$ -ből. Mivel azonban $m + 2 > N$, ezért ezen $b - 1$ számot is felveszi valahol a $c_1, c_2, \dots$ sorozat, csak még c_{m+1} előtt. Így ez a $b - 1$ szám mindegyike olyan c_k , melyre $k \leq m$, így $c_k \leq k + 2015 \leq m + 2015$ alapján ezek a számok mind az $[m + 2, m + 2015]$ intervallumba esnek.

Tehát azon 2014 egész közül, melyek az $[m + 2, n + 2015]$ intervallumban benne vannak, de a $\{c_{m+1}, \dots, c_n\}$ halmazban nem, $b - 1$ darab az $\{c_1, \dots, c_m\}$ halmazban van, a maradék 2015 - b darab pedig szükségképpen a $\{c_{n+1}, \dots\}$ halmazban. Ezen 2015 - b szám mindegyike legalább $n + 2$, így ezek az $[n + 2, n + 2015]$ intervallumba esnek.

Ezen a ponton álljunk meg egy pillanatra, és vegyük észre, hogy a feladat megoldásával lényegében készen vagyunk. Csak az alapján, hogy a 2014 kimaradó szám valahol az $[m + 2, n + 2015]$ intervallumban van, még nem tudnánk pontos becslést mondani, hiszen m, n -et kicsivel megváltoztatva az egyik kimaradó szám szabadon „átugorhatna” az intervallum elejéről a végére, ezzel nagy ($n - m$ nagyságrendű) változást eredményezve. De azáltal, hogy a 2014 kimaradó szám közül mindig $b - 1$ van az intervallum elején, és 2015 - b a végén (ahol a b egy univerzális paramétere a sorozatnak!), ilyen ugrások nem történhetnek meg, csak az intervallum szélein lévő rövid (2014 hosszú) intervallumok belsejében mozoghatnak a kimaradó számok. Így lehetséges az, hogy m, n -től független, 1007^2 nagyságrendű becslést fogunk tudni mondani.

Nem maradt más hátra, minthogy kiszámoljuk a 2014 kimaradó szám összegének lehetséges legkisebb és legnagyobb értékét, majd ezt visszavezessük a feladatbeli összegre. Tudjuk, hogy a 2014 szám felbontható valahogy egy $b - 1$ és egy 2015 - b elemű csoportra, melyek elemei rendre az $[m + 2, m + 2015]$, illetve az $[n + 2, n + 2015]$ intervallumból valók. (Előfordulhat, hogy ez a két intervallum átfedi egymást, de ez nem okoz gondot.) Mivel a számok különbözőek, ezért a 2014 szám összege legalább

$$\begin{aligned} & ((m + 2) + (m + 3) + \dots + (m + b)) + \\ & + ((n + 2) + (n + 3) + \dots + (n + 2016 - b)) = \\ & = \frac{(b - 1)(2m + b + 2)}{2} + \frac{(2015 - b)(2n + 2018 - b)}{2} = h_{\min}, \end{aligned}$$

legfeljebb pedig

$$\begin{aligned} & ((m + 2017 - b) + \dots + (m + 2015)) + ((n + b + 1) + \dots + (n + 2015)) = \\ & = \frac{(b - 1)(2m + 4032 - b)}{2} + \frac{(2015 - b)(2n + 2016 + b)}{2} = h_{\max}. \end{aligned}$$

Ha H jelöli az előbbi 2014 kimaradó szám összegét, akkor a feladatban szereplő összeg így írható:

$$\begin{aligned} \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) &= \sum_{j=m+1}^n (c_j - j - b) = \sum_{i=m+2}^{n+2015} i - H - \sum_{j=m+1}^n j - \sum_{j=m+1}^n b = \\ &= \frac{(n + 2014 - m)(n + m + 2017)}{2} - H - \frac{(n - m)(n + m + 1)}{2} - b(n - m). \end{aligned}$$

A $h_{\min} \leq H \leq h_{\max}$ becslést alkalmazva, a kifejezések egyszerűsítése után végül a következőt kapjuk:

$$b^2 - 2016b + 2015 \leq \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \leq -b^2 + 2016b - 2015.$$

Így tehát valóban,

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq -b^2 + 2016b - 2015 = 1007^2 - (b - 1008)^2 \leq 1007^2.$$