

Williams Kada megoldása. Mindenekelőtt keressük meg (1) lineáris megoldásait, vagyis az $f(x) = ax + b$ alakúakat! Beírva (1)-be, majd kibontva és átrendezve:

$$\begin{aligned} a(x + a(x + y) + b) + b + axy + b &= x + a(x + y) + b + y(ax + b), \\ (*) \quad (a^2 - 1)x + (a^2 - a - b)y + (ab + b) &= 0. \end{aligned}$$

Meggondolható, hogy ez éppen akkor állhat fenn minden x, y -ra, hogyha $(*)$ -ban mindhárom együttható nulla, ami csak akkor lehet igaz, ha $(a, b) = (1, 0)$ vagy $(-1, 2)$, azaz $f(x) = x$ vagy $f(x) = 2 - x$. Ennek a meggondolása nem tartozik a megoldáshoz, viszont ebből sejthető meg, hogy ez a kettő lesz (1)-nek az összes megoldása. Jól látható, hogy ezekenél $(*)$ együtthatói tényleg mind nullák lesznek, vagyis hogy $f(x) = x$ és $f(x) = 2 - x$ valóban megoldása (1)-nek.

Helyettesítsünk $x = 0$ -t, majd pedig $y = 1$ -et (1)-be, nyerjük:

$$\begin{aligned} (2) \quad f(f(y)) + f(0) &= f(y) + yf(0), \\ (3) \quad f(x + f(x + 1)) &= x + f(x + 1). \end{aligned}$$

Kezdeképpen könnyű megtalálni $f(0)$ lehetséges értékeit: írjunk (2)-be előbb $y = 0$ -t: $f(f(0)) = 0$ adódik, amiért (2)-be most $y = f(0)$ -t helyettesítve

$$f(f(f(0))) + f(0) = f(f(0)) + f(0)^2,$$

azaz $2f(0) = f(0)^2$ adódik, ahonnan $f(0) = 2$ vagy $f(0) = 0$.

1. eset: $f(0) = 2$, itt az $f(x) = 2 - x$ megoldást várjuk.

Ez az eset egy trükkös észrevétellel elintézhető. Figyeljük meg ugyanis, hogy (3) szerint $x + f(x + 1)$ minden x -re fixpontja f -nek. Ellenben a megcélzott $x \mapsto 2 - x$ függvénynek csak az 1 a fixpontja. Ha belátnánk, hogy $f(0) = 2$ esetén f -nek csak az 1 lehet fixpontja, abból következne, hogy $x + f(x + 1)$ fixpont lévén minden x -re, azonosan 1 kell legyen, vagyis $f(x + 1) = 1 - x$ minden x -re, azaz $f(t) = 2 - t$ bármely t -re ($t := x + 1$).

Belátjuk tehát, hogy $f(0) = 2$ -re $f(a) = a - b$ ól $a = 1$ következik. Ehhez (2)-t vegyük szemügyre, $y = a$ -t helyettesítve: $f(f(a)) + 2 = f(a) + 2a$, $a = 1$ adódik. Ez igazolja, hogy $f(0) = 2$ esetén $f(x) = 2 - x$.

2. eset: $f(0) = 0$, itt az $f(x) = x$ megoldást várjuk.

Ezúttal bonyolultabban járunk el: azt vesszük észre, hogy ha (1)-be x, y helyett $-x, -y$ -t helyettesítünk, azzal $f(xy)$ ugyanúgy jelen marad, és ezért kiejthetjük:

$$\begin{aligned} f(xy) &= -f(x + f(x + y)) + (x + f(x + y)) + yf(x) \\ f(xy) &= -f(-x + f(-x - y)) + (-x + f(-x - y)) - yf(-x). \end{aligned}$$

Itt gyakran üti fel fejét $x + y$ és ellentettje, kényelmesebb az $y := k - x$ jelölést használni:

$$\begin{aligned} (4) \quad -f(x + f(k)) + (x + f(k)) + (k - x)f(x) &= \\ = -f(-x + f(-k)) + (-x + f(-k)) - (k - x)f(-x). \end{aligned}$$

A megoldáshoz először meghatározunk néhány $f(\pm k)$ értéket, majd pedig az adódó összefüggéseket összehasonlítjuk, amikből már némi munka árán kifejezhetjük $f(x)$ -et.

Már tudjuk, hogy $f(0) = 0$, írjunk hát (4)-be $k = 0$ -t, rögtön barátságosabb lesz:

$$\begin{aligned} (5) \quad -f(x) + x - xf(x) &= -f(-x) - x + xf(-x), \\ 2x &= (x + 1)f(x) + (x - 1)f(-x). \end{aligned}$$

Ha (3)-ba $x = -1$ -et írunk, akkor $f(0) = 0$ miatt $f(-1) = -1$ nyerhető, illetve (5)-be $x = 1$ -et írva, megkapjuk, hogy $2 = 2f(1)$, $f(1) = 1$. Vagyis (4)-be már írhatunk $k = 1$ -et is:

$$-f(x + 1) + (x + 1) + (1 - x)f(x) = -f(-x - 1) - (x + 1) - (1 - x)f(-x).$$

Itt viszont (5) szerint $-(1 - x)f(-x)$ helyére $2x - (x + 1)f(x)$ írható, vagyis

$$\begin{aligned} -f(x + 1) + 2(x + 1) &= (x - 1)f(x) - f(-x - 1) + 2x - (x + 1)f(x), \\ 2 + 2f(x) &= f(x + 1) - f(-x - 1). \end{aligned}$$

Ha ezt x helyett $x - 1$ -re írjuk fel, akkor

$$(6) \quad 2 + 2f(x - 1) = f(x) - f(-x)$$

adódik.

Beszorozva (6)-ot $(x - 1)$ -gyel, majd hozzáadva (5)-öt:

$$(7) \quad \begin{aligned} 2(x - 1) + 2(x - 1)f(x - 1) + 2x &= (x - 1)f(x) + (x + 1)f(x), \\ (x - 1)f(x - 1) + (2x - 1) &= xf(x). \end{aligned}$$

Ezután (6)-ba $x = -1$ -et írva, $f(-2) = -2$, majd pedig (6)-ba $x = 2$ -t írva, $f(2) = 2$ nyerhető.

A befejezéshez írjunk (4)-be $k = 2$ -t:

$$-f(x + 2) + (x + 2) + (2 - x)f(x) = -f(-x - 2) + (-x - 2) - (2 - x)f(-x),$$

ahol $f(x + 2) - f(-x - 2) = 2 + 2f(x + 1)$ érvényes (6) szerint, így

$$2(x + 2) + (2 - x) \cdot (f(x) + f(-x)) = 2 + 2f(x + 1).$$

Beszorozva $(x + 1)$ -gyel, (7) miatt adódik:

$$\begin{aligned} 2(x + 2)(x + 1) - (x - 2)(x + 1) \cdot (f(x) + f(-x)) &= 2(x + 1) + 2(xf(x) + 2x + 1), \\ 2(x^2 + 3x + 2) - 2(x + 1) - 2(2x + 1) &= (x^2 - x - 2)(f(x) + f(-x)) + 2xf(x), \\ 2x^2 &= (x^2 + x - 2)f(x) + (x^2 - x - 2)f(-x). \end{aligned}$$

Ezt pedig $(x - 1)$ -gyel tovább szorozva és (5)-öt használva:

$$\begin{aligned} 2x^2(x - 1) &= (x - 1)(x^2 + x - 2)f(x) + (x^2 - x - 2)(2x - (x + 1)f(x)), \\ 2x^2(x - 1) - 2x(x^2 - x - 2) &= [(x - 1)(x^2 + x - 2) - (x + 1)(x^2 - x - 2)]f(x), \\ 2x(x^2 - x - (x^2 - x - 2)) &= \\ = [x((x^2 + x - 2) - (x^2 - x - 2)) - ((x^2 + x - 2) + (x^2 - x - 2))]f(x), \\ 4x &= [x \cdot (2x) - (2x^2 - 4)]f(x), \end{aligned}$$

amiből már világos, hogy $f(x) = x$, bármely x -re.

Tehát két megoldásunk van: $f(x) = x$ és $f(x) = 2 - x$, és ezeket már leellenőriztük.