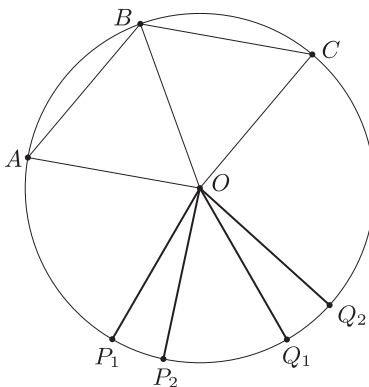


Di Giovanni Márk megoldása. a) Ha n páratlan, akkor tekintsünk egy szabályos n -szöget és lássuk be, hogy ez egy kiegyensúlyozott halmaz. Ehhez tekintsünk két tetszőleges, különböző A és B pontot és a távolságukat ívhosszban mérve (a sokszög körülírt köre mentén). Ekkor a két távolság (a hosszabb és rövidebb ív mentén) összege n , azaz páratlan, ezért az egyik távolság páratlan a másik pedig páros. Ha viszont az egyik ív hossza páros, akkor S tartalmazza az ívfelezőpontot, ami ugyanakkora távolságra van A -tól és B -től.

Ha n páros, akkor tekintsünk egy kört és S legyen a következő pontok halmaza: a kör O középpontja és a kör kerületének néhány pontja az *ábra* szerint: A, B, C úgy, hogy $ABCO$ rombusz legyen, továbbá tetszőleges k darab pont $(P_1, P_2, \dots, P_k)$, illetve ezen pontok O körüli 60° -os pozitív iránybeli elforgatottja $(Q_1, Q_2, \dots, Q_k)$.



Nyilván megválaszthatjuk a P_i -pontokat úgy, hogy az összes általunk kiválasztott pont különböző legyen. Ekkor S -nek pontosan $2k + 4$ darab eleme van (ahol k tetszőleges nemnegatív egész). Tekintsünk most két különböző S -beli pontot. Ha mindkettő a kör kerületén van, akkor a kör középpontja egyenlő távol van tőlük. Ha az egyik a kör középpontja, akkor mivel A, B -nek, B, C -nek, illetve Q_i, P_i -nek a 60° -os elforgatottja, ezért a szabályos háromszögek miatt azonnal találunk olyan pontot, ami a két kiválasztott ponttól egyenlő távolságra van. Ezzel beláttuk, hogy S kiegyensúlyozott. Továbbá $2k + 4$ felveszi az összes 3-nál nagyobb páros számot.

Tehát minden $n \geq 3$ egészre létezik n elemű kiegyensúlyozott halmaz.

b) Azt állítjuk, hogy pontosan a páratlan n -ekre létezik n elemű kiegyensúlyozott, centrum-nélküli halmaz.

Ha n páratlan, akkor a szabályos n -szög kiegyensúlyozott halmaz (ezt már korábban beláttuk), továbbá bármely három pontját is választjuk ki, az a pont, amely mindhármuktól egyenlő távolságra van, éppen a körülírt körök középpontja, ami nyilván megegyezik a szabályos n -szög körülírt körének középpontjával. Ez a pont viszont nem S -beli, tehát S centrum-nélküli.

Lássuk most be, hogy páros n -re nem létezik ilyen S halmaz. Legyen $n = 2k$ és tegyük fel indirekt, hogy találtunk ilyen S -et. Ekkor egy tetszőleges A csúcshoz legfeljebb $k - 1$ darab S -beli pontpár található úgy, hogy A rajta legyen a felezőmerőlegesükön, mert ha létezne k ilyen pár, akkor a $2k - 1$ csúcs közül lenne olyan B pont, amihez tartozó két felezőmerőleges is rajta lenne az A pont. Tekintsük ezen felezőmerőlegeseket meghatározó szakaszokat: BC -t és BD -t. Ekkor $AB = AC$ és $AB = AD$ -ből $AB = AC = AD$ következik, tehát S -nek van centruma, ami ellentmond eredeti feltevésünknek. Tehát S -nek minden csúcsa legfeljebb $k - 1$ darab különböző S -beli pontpár által meghatározott felezőmerőlegeseken lehet rajta. Viszont összesen $\binom{2k}{2} = k(2k - 1)$ darab pontpár van, amelyek mindegyikéhez tartozik egy felezőmerőleges, továbbá minden pontpár által meghatározott felezőmerőlegeseken van legalább egy darab S -beli pont.

Tehát $k(2k - 1) \leq 2k(k - 1)$, azaz $k \geq 2k$, ami nyilvánvalóan ellentmondás. Így páros n -re nincsen kiegyensúlyozott, centrum-nélküli halmaz.

Összefoglalva: pontosan a páratlan n -ekre létezik kiegyensúlyozott, centrum-nélküli S halmaz.