

Janzer Olivér megoldása. Jelöljük a -val azt az (egyik) 1-nél nagyobb racionális számot, melyre $f(a) = a$. (i) -be $x = a$ -t és $y = 1$ -et helyettesítve $f(a)f(1) \geq f(a)$, azaz $af(1) \geq a$. Mivel $a > 1$, azért leoszthatunk, így $f(1) \geq 1$. Bebizonyítjuk n szerinti teljes indukcióval, hogy ha n pozitív egész, akkor $f(n) \geq n$. $n = 1$ -re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $n \leq k$ -ig már beláttuk, bizonyítunk $n = k + 1$ -re. (ii) -be $x = k$ -t és $y = 1$ -et helyettesítve

$$f(k+1) \geq f(k) + f(1) \geq k + 1,$$

így az indukciós lépést befejeztük. Tehát pozitív egész n -ekre $f(n) \geq n$.

Vegyünk egy tetszőleges $\frac{p}{q}$ pozitív racionális számot (p és q pozitív egészek). Ekkor (i) -be $x = \frac{p}{q}$ -t és $y = q$ -t helyettesítve

$$f\left(\frac{p}{q}\right)f(q) \geq f(p).$$

$f(q) \geq q$ és $f(p) \geq p$, így $f(q)$ és $f(p)$ is pozitív. Így $f\left(\frac{p}{q}\right)$ is pozitív kell legyen. Tehát minden $x \in Q_{>0}$ -ra $f(x) > 0$.

Így (ii) -ből

$$f(x+y) \geq f(x) + f(y) > f(y),$$

tehát a függvény szigorúan monoton nő. (Ha $x_1 > x_2$, akkor $x = x_1 - x_2$, $y = x_2$ helyettesítésekkel $f(x+y) > f(y)$ -ből $f([x_1 - x_2] + x_2) > f(x_2)$, azaz $f(x_1) > f(x_2)$.)

Most n szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy $f(a^n) \leq a^n$, ha n pozitív egész. $n = 1$ esetén $f(a) = a \leq a$. Bizonyítunk $n = k$ -ről $n = k + 1$ -re. (i) -be $x = a^k$ -t és $y = a$ -t helyettesítve $f(a^k)f(a) \geq f(a^{k+1})$. Így, mivel $f(a^k) \leq a^k$ és $f(a) = a$, azért $f(a^{k+1}) \leq a^{k+1}$.

Tegyük fel, hogy valamilyen $x_0 \in Q_{>0}$ esetén $f(x_0) > x_0$. Legyen ekkor $f(x_0) = x_0 + c$, ahol $c > 0$. n szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy $f(nx_0) \geq nx_0 + nc$, ha n pozitív egész. $n = 1$ -re valóban $f(x_0) = x_0 + c \geq x_0 + c$. Bizonyítunk $n = k$ -ről $n = k + 1$ -re. (ii) -be $x = kx_0$ -t és $y = x_0$ -t helyettesítve

$$f([k+1]x_0) \geq f(kx_0) + f(x_0) \geq (kx_0 + kc) + (x_0 + c) = (k+1)x_0 + (k+1)c.$$

Az indukciós lépést befejeztük, $f(nx_0) \geq nx_0 + nc$.

Mivel c és x_0 pozitív számok, így van olyan K pozitív szám, melyre $Kc > x_0$. Minthogy $a > 1$, ezért van olyan n pozitív egész, amelyre teljesül $(K+1)x_0 < a^n$. x_0 pozitív szám, így egyértelműen létezik olyan k egész, melyre

$$kx_0 \leq a^n < (k+1)x_0.$$

Így $(K+1)x_0 < a^n < (k+1)x_0$, amiből $K < k$. Így, mivel K pozitív, ezért k is, azaz k pozitív egész. Mivel f szigorúan monoton nő, ezért $kx_0 \leq a^n$ -ből $f(kx_0) \leq f(a^n)$. Korábban beláttuk állításunk szerint viszont $f(kx_0) \geq kx_0 + kc$, illetve $f(a^n) \leq a^n$, így

$$kx_0 + kc \leq f(kx_0) \leq f(a^n) \leq a^n.$$

Mivel $a^n < (k+1)x_0$, azért $kx_0 + kc < (k+1)x_0$, amiből $kc < x_0$. Azonban $K < k$ és $Kc > x_0$, ami $c > 0$ miatt ellentmond $kc < x_0$ -nak. Így ellentmondásra jutottunk, azaz feltevésünkkel szemben nincsen olyan $x_0 \in Q_{>0}$, amelyre $f(x_0) > x_0$. Tehát $x \in Q_{>0}$ esetén $f(x) \leq x$.

Azt azonban tudjuk, hogy $f(n) \geq n$, ha n pozitív egész. Így $n \leq f(n) \leq n$, tehát $f(n) = n$. Vegyünk egy tetszőleges $\frac{p}{q}$ pozitív racionális számot (p és q pozitív egészek). Ekkor (i) -be $x = \frac{p}{q}$ -t és $y = q$ -t helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$f\left(\frac{p}{q}\right)f(q) \geq f(p).$$

Mivel $f(q) = q$ és $f(p) = p$, azért

$$f\left(\frac{p}{q}\right)q \geq p, \quad \text{amiből} \quad f\left(\frac{p}{q}\right) \geq \frac{p}{q}.$$

Ezt összevetve $f(x) \leq x$ -szel azt kapjuk, hogy $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$. Így a feladat állítását igazoltuk.