

Szabó Attila megoldása. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az $A_1B_1C_1$ kör P középpontja a körülírt kör B -t nem tartalmazó AC ívén van. A háromszög oldalait és szögeit a szokásos módon jelöljük, félkerülete s , területe t , beírt és körülírt körének sugara rendre ϱ és R . Legyenek a PA , PB , PC szakaszok látószögei rendre $PBA \sphericalangle = PCA \sphericalangle = \alpha'$, $PCB \sphericalangle = \pi - PAB \sphericalangle = \beta'$ és $PAC \sphericalangle = PBC \sphericalangle = \gamma'$. Ekkor a szinusz-tétel miatt

$$(1) \quad PA = 2R \sin \alpha', \quad PB = 2R \sin \beta', \quad PC = 2R \sin \gamma',$$

a következő összefüggések egyszerű szögszámolással adódnak:

$$(2) \quad \pi - \beta' = \alpha + \gamma', \quad \beta = \alpha' + \gamma', \quad \beta' = \gamma + \alpha'.$$

Ismert továbbá, hogy $CB_1 = BC_1 = s - a$, $AC_1 = CA_1 = s - b$, $AB_1 = BA_1 = s - c$.

Írjuk fel a koszinusztételt a B_1CP és C_1BP háromszögekben:

$$(3) \quad PB_1^2 = (s - a)^2 + CP^2 - 2(s - a)CP \cos \alpha';$$

$$(4) \quad PC_1^2 = (s - a)^2 + BP^2 - 2(s - a)BP \cos \alpha'.$$

Mivel $PB_1 = PC_1$, a két jobb oldal egyenlő:

$$(5) \quad \begin{aligned} CP^2 - 2(s - a)CP \cos \alpha' &= BP^2 - 2(s - a)BP \cos \alpha', \\ (CP - BP)(CP + BP) &= CP^2 - BP^2 = 2(s - a)(CP - BP) \cos \alpha'. \end{aligned}$$

A B_1AP és A_1BP háromszögekben felírt koszinusztételekből ugyanígy következik, hogy

$$(6) \quad (AP - BP)(AP + BP) = 2(s - c)(AP - BP) \cos \gamma'.$$

Az (5), (6) egyenletek $CP = BP$, illetve $AP = BP$ esetén is teljesülnek. Ha viszont mindkettő teljesülne, P az ABC kör középpontja lenne, ami ellentmondás: az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $CP \neq BP$. Ekkor (5) mindkét oldalát eloszthatjuk $(CP - BP)$ -vel:

$$(7) \quad \begin{aligned} CP + BP &= 2(s - a) \cos \alpha', \\ 2R(\sin \gamma' + \sin \beta') &= (b + c - a) \cos \alpha' = 2R(\sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha) \cos \alpha', \\ \sin(\beta - \alpha') + \sin(\gamma + \alpha') &= (\sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha) \cos \alpha', \\ \sin \beta \cos \alpha' - \cos \beta \sin \alpha' + \sin \gamma \cos \alpha' + \cos \gamma \sin \alpha' &= \\ &= \sin \beta \cos \alpha' + \sin \gamma \cos \alpha' - \sin \alpha \cos \alpha', \\ \sin \alpha \cos \alpha' &= \sin \alpha'(\cos \beta - \cos \gamma), \end{aligned}$$

$$(8) \quad \operatorname{ctg} \alpha' = \frac{\cos \beta - \cos \gamma}{\sin \alpha}.$$

Most írjuk fel a koszinusztételt az A_1CP és AC_1P háromszögekben is:

$$(9) \quad PA_1^2 = (s - b)^2 + PC^2 - 2(s - b)PC \cos \beta';$$

$$(10) \quad PC_1^2 = (s - b)^2 + PA^2 + 2(s - b)PA \cos \beta'.$$

$PA_1 = PC_1$ miatt a két jobb oldal egyenlő:

$$(11) \quad \begin{aligned} PC^2 - 2(s - b)PC \cos \beta' &= PA^2 + 2(s - b)PA \cos \beta', \\ (PC - PA)(PC + PA) &= PC^2 - PA^2 = 2(s - b)(PA + PC) \cos \beta', \\ PC - PA &= 2(s - b) \cos \beta', \\ 2R(\sin \gamma' - \sin \alpha') &= (a + c - b) \cos \beta' = 2R(\sin \alpha + \sin \gamma - \sin \beta) \cos \beta', \\ \sin(\beta' + \alpha) - \sin(\beta' - \gamma) &= (\sin \alpha + \sin \gamma - \sin \beta) \cos \beta', \\ \sin \beta' \cos \alpha + \cos \beta' \sin \alpha - \sin \beta' \cos \gamma + \cos \beta' \sin \gamma &= \\ &= \sin \alpha \cos \beta' + \sin \gamma \cos \beta' - \sin \beta \cos \beta', \\ \sin \beta'(\cos \gamma - \cos \alpha) &= \sin \beta \cos \beta', \end{aligned}$$

$$(12) \quad \operatorname{ctg} \beta' = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha}{\sin \beta}.$$

(2) miatt $\beta' - \alpha' = \gamma$: ha ez teljesül, ugyanez fennáll kotangenseikre is, azaz $\text{ctg}(\beta' - \alpha') = \text{ctg} \gamma$. Felhasználva a kotangens addíciós képletét (nullával osztás nem fordul elő, mivel $0 < \gamma < \pi$):

$$\begin{aligned} \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} &= \text{ctg} \gamma = \frac{\text{ctg} \alpha' \text{ctg} \beta' + 1}{\text{ctg} \alpha' - \text{ctg} \beta'} = \frac{\frac{\cos \beta - \cos \gamma}{\sin \alpha} \frac{\cos \gamma - \cos \alpha}{\sin \beta} + 1}{\frac{\cos \beta - \cos \gamma}{\sin \alpha} - \frac{\cos \gamma - \cos \alpha}{\sin \beta}} = \\ &= \frac{(\cos \beta - \cos \gamma)(\cos \gamma - \cos \alpha) + \sin \alpha \sin \beta}{(\cos \beta - \cos \gamma) \sin \beta - (\cos \gamma - \cos \alpha) \sin \alpha} = \\ &= \frac{-\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha - \cos^2 \gamma + \cos \alpha \cos \gamma + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta - \sin \alpha \cos \gamma - \sin \beta \cos \gamma} = \\ &= \frac{-\cos(\alpha + \beta) + \cos \gamma(\cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma)}{\frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) - \cos \gamma(\sin \alpha + \sin \beta)} = \\ &= \frac{\cos \gamma(1 + \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma)}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - \cos \gamma(\sin \alpha + \sin \beta)} = \\ &= \frac{\cos \gamma(1 + \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma)}{\sin \gamma \cos(\alpha - \beta) - \cos \gamma(\sin \alpha + \sin \beta)}. \end{aligned}$$

A bizonyítandóból tehát következik a következő egyenlet teljesülése:

$$(13) \quad \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} = \frac{\cos \gamma(1 + \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma)}{\sin \gamma \cos(\alpha - \beta) - \cos \gamma(\sin \alpha + \sin \beta)}.$$

(13) nyilván igaz akkor, ha $\cos \gamma = 0$, azaz γ derékszög. Tegyük fel most, hogy γ nem derékszög, azaz oszthatunk $\cos \gamma$ -val: ezt elvégezve és felsorozva a nevezőkkel:

$$\begin{aligned} \sin \gamma \cos(\alpha - \beta) - \cos \gamma(\sin \alpha + \sin \beta) &= \sin \gamma(1 + \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma), \\ \sin \gamma \cos(\alpha - \beta) &= \sin \gamma + (\sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha) + \\ &\quad + (\sin \gamma \cos \beta + \cos \gamma \sin \beta) - \sin \gamma \cos \gamma = \\ &= \sin \gamma + \sin(\gamma + \alpha) + \sin(\gamma + \beta) - \sin \gamma \cos \gamma = \\ &= \sin \gamma + \sin \beta + \sin \alpha + \sin \gamma \cos(\alpha + \beta), \\ \sin \gamma(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) &= \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma, \\ \sin \gamma \cdot 2 \sin \alpha \sin \beta &= \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma. \end{aligned}$$

Az egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk R^2 -tel és alkalmazzuk a szinusztételt:

$$t = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{R}{2}(a + b + c) = Rs;$$

másrészt viszont ismert módon $t = \varrho s$ és nyilván $R > \varrho$: ezek együtt ellentmondásra vezetnek, a háromszög tehát C -ben derékszögű. Ezt kellett bizonyítani.

Megjegyzés. Nem tettük fel, hogy $AP \neq BP$. Ha a háromszög C -ben derékszögű, valóban

$$\text{ctg} \alpha' = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = 1 = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \text{ctg} \beta',$$

tehát $\alpha' = \beta'$, így $AP = BP$. Az tehát, hogy a háromszögnek C -ben kell derékszögűnek lennie, az általánosság megszorításaiból (P elhelyezéséből és $CP \neq BP$ feltevéséből) következik.

