

Havasi Márton megoldása.¹ Az állítást k -ra vonatkoztatott indukcióval bizonyítjuk. A következőt fogjuk belátni: $k = 1$ -re, az $m_1 = n$ triviálisan megoldás.

Feltesszük, hogy az állítás igaz egy pozitív egész k -ra. Azt akarjuk belátni, hogy minden n egészhez léteznek $m_1, \dots, m_{k+1}$ egészek, amelyek kielégítik az

$$1 + \frac{2^{k+1} - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_{k+1}}\right)$$

egyenletet. Két esetet különböztetünk meg n paritásától függően.

1. eset: n páratlan. Ekkor $\frac{n+1}{2}$ biztosan egész és a feltételből adódóan léteznek olyan $m_1, \dots, m_k$ egészek, amelyekre teljesül

$$1 + \frac{2^k - 1}{\frac{n+1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Legyen $m_{k+1} = n$. Ekkor:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_{k+1}}\right) &= \left(1 + \frac{2^k - 1}{\frac{n+1}{2}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{2^{k+1} - 2}{n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1+2^{k+1}-2}{n} = 1 + \frac{2^{k+1}-1}{n}. \end{aligned}$$

2. eset: n páros. Ekkor $\frac{n}{2}$ biztosan egész és a feltételből adódóan léteznek olyan $m_1, \dots, m_k$ egészek, amelyekre teljesül

$$1 + \frac{2^k - 1}{\frac{n}{2}} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Legyen $m_{k+1} = 2^{k+1} + n - 2$. Ekkor:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_{k+1}}\right) &= \left(1 + \frac{2^k - 1}{\frac{n}{2}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{k+1} + n - 2}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{2^{k+1} - 2}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{k+1} + n - 2}\right) = \frac{2^{k+1} + n - 2}{n} \cdot \frac{2^{k+1} + n - 2 + 1}{2^{k+1} + n - 2} = \\ &= 1 + \frac{2^{k+1} - 1}{n}. \end{aligned}$$

¹Forrás: imomath.com.