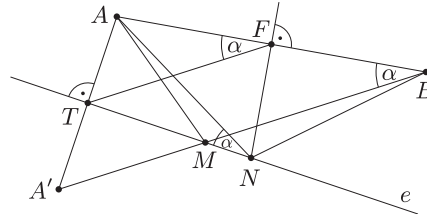


Megoldás. Feltehetjük, hogy A és B különböző pontok (ellenkező esetben az N pont nem meghatározott, de persze bármely lehetséges helyzetére igaz, hogy a négy pont egy körön helyezkedik el), és azt is, hogy az AB egyenes nem merőleges e -re, ellenkező esetben ugyanis az N pont nem létezik (bár felfogható egy végtelen távoli pontnak, amely az egyenessé fajuló végtelen sugarú ABM körön helyezkedik el). Ha AB párhuzamos e -vel, akkor az M és az N pont egybeesik, ezért az állítás nyilvánvaló. A fennmaradó esetekben, mivel egyik pontnak sincs kitüntetett szerepe, feltehetjük, hogy A közelebb van e -hez, mint B .

Legyen az A pont e -re vonatkozó tükörképe A' , az AA' és e egyenesek metszéspontja pedig T . Mivel az e egyenes bármely E pontjára $AE + EB = A'E + EB$, azért a háromszög-egyenlőtlenség miatt az összeg akkor lesz a lehető legkisebb, ha E az $A'B$ szakaszon helyezkedik el. Vagyis az M pont megegyezik az $A'B \cap e$ ponttal. Az N pont pedig nyilván az AB szakasz felezőmerőlegesének e -vel való metszéspontja.



Jelölje AB felezőpontját F . Ekkor az $ATNF$ négyszög húrnégyszög, mert T -nél és F -nél lévő szögei derékszögek. Ezért $\angle ANT = \angle AFT = \alpha$, mert mindkettő az $ATNF$ négyszög köré írt körének rövidebbik AT ívéhez tartozó kerületi szög. Az F és T az AB , illetve AA' szakaszok felezőpontjai, ezért az ATF és $AA'B$ háromszögek hasonlóak, tehát $\angle ABA' = \angle AFT = \alpha$. Tehát az AM szakasz N -ből és B -ből ugyanakkora szögben látszik. Az A közelebb van e -hez, mint B , ezért $AM < AN$, vagyis N és B az AM egyenesnek ugyanazon az oldalán helyezkedik el. Tehát N és B az AM szakasz α szöghöz tartozó két látókörivé közül ugyanazon van rajta. Így az $AMNB$ négyszög valóban húrnégyszög.