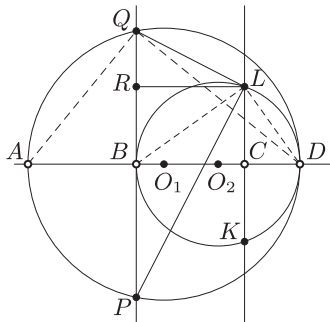


I. megoldás. Legyen $AB = BC = x$, $CD = y$. Elegendő belátni, hogy a PLQ háromszög L -nél derékszögű, mert akkor L rajta van PQ Thalész-körén (szimmetria miatt K is).



Állítsunk L -ből merőlegest PQ -ra, a talppontja legyen R . A BDL háromszög derékszögű, az átfogóhoz tartozó magasság CL . A derékszögű háromszögben felírva a magasságtételt:

$$CL = \sqrt{BC \cdot CD} = \sqrt{xy} = RB.$$

Az AQD derékszögű háromszögben felírva a magasságtételt:

$$BQ = \sqrt{AB \cdot BD} = \sqrt{x(x+y)};$$

és innen

$$\begin{aligned} QR &= BQ - RB = \sqrt{x(x+y)} - \sqrt{xy}, \\ RP &= BQ + RB = \sqrt{x(x+y)} + \sqrt{xy}. \end{aligned}$$

Mivel

$$QR \cdot RP = (\sqrt{x(x+y)} - \sqrt{xy})(\sqrt{x(x+y)} + \sqrt{xy}) = x(x+y) - xy = x^2 = RL^2,$$

így $RL = \sqrt{QR \cdot RP}$, és a magasságtétel megfordítása miatt a PQL háromszög derékszögű (a PKQ háromszög is derékszögű).

Ezzel igazoltuk az állítást.

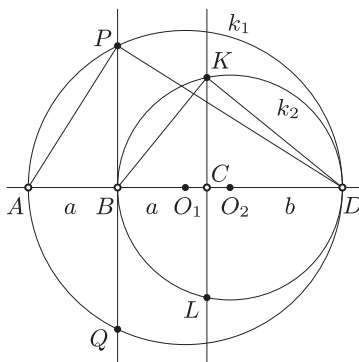
II. megoldás. Az ábra jelölései szerint: $d_{AB} = d_{BC} = a$, $d_{CD} = b$. A k_1 kör AD átmérőjű Thalész-kör, ezért $\angle APD = 90^\circ$. A k_2 kör BD átmérőjű Thalész-kör, ezért $\angle BKD = 90^\circ$. A BKD derékszögű háromszögben a befogótételt felírva:

$$(1) \quad d_{BK} = \sqrt{a(a+b)}.$$

Az ADP derékszögű háromszögben a magasságtételt alkalmazva:

$$(2) \quad d_{PB} = \sqrt{a(a+b)}.$$

(1)-ből és (2)-ből következik: $d_{PB} = d_{BK}$.



A tengelyes szimmetria miatt $d_{BP} = d_{BQ}$ és $d_{CK} = d_{CL}$, ezért a P, K, L, Q pontok a B ponttól egyenlő távolságra vannak, azaz illeszkednek a B középpontú $\sqrt{a(a+b)}$ sugarú körvonalra, és ezt kellett bizonyítani.