Nagy János megoldása. Rögtön látható, hogy a $g(n) = n + c$ alakú függvények megfelelnek a feltételnek, ahol c egy nemnegatív egész szám, hiszen ekkor a függvény értékkészlete megfelelő és

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big) = (m + n + c)^2,$$

ami valóban mindig teljes négyzet.

Bebizonyítjuk, hogy csak ezek a jó függvények.

Nézzük meg, hogy egy tetszőleges pozitív egész m-re milyen értéket vehet fel a $g(m+1) - g(m)$ kifejezés. Először igazolom, hogy nem lehet 2-től különböző prímosztója. Indirekt módon tegyük fel, hogy valamilyen $p \neq 2$ prímre $p \mid g(m+1) - g(m)$ és legyen $g(m) = pl + r$, illetve $g(m+1) = pk + r$. Mivel $p > 2$, azért kettőnél több maradékosztály van, tehát létezik biztosan olyan u pozitív egész, hogy sem $(u+l)$, sem $(u+k)$ nem osztható p-vel. Legyen $n = pu - r$.

A feladat feltételéből tudjuk, hogy $\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$ négyzetszám, tehát $p(l + u)\big(m + g(n)\big)$ négyzetszám. Tudjuk, hogy $(u+l)$ nem osztható p-vel, de p-nek páros kitevőn kell szerepelnie egy négyzetszámban, így $p \mid m + g(n)$.

Ugyanígy kapjuk m helyébe $(m+1)$-et írva, hogy $p \mid m + 1 + g(n)$, ebből $p \mid m + 1 + g(n) - m - g(n) = 1$, ami ellentmondás. Így tehát azt kaptuk, hogy $g(m+1) - g(m)$-nek semmilyen m-re nem lehet 2-től különböző prímosztója.

Most bebizonyítom, hogy $g(m+1) - g(m)$ nem lehet osztható 4-gyel. Tételezzük fel indirekt módon, hogy $4 \mid g(m+1) - g(m)$. Ekkor létezik olyan n pozitív egész szám, hogy $n + g(m)$ és $n + g(m+1)$ is kettő maradékot ad 4-gyel osztva.

Tudjuk, hogy $\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$ négyzetszám, de $g(m) + n$ osztható 2-vel, de 4-gyel nem, amiből $2 \mid m + g(n)$. Ugyanígy kapjuk m helyébe $(m+1)$-et írva, hogy $2 \mid m + 1 + g(n)$, két szomszédos egész szám mindegyike nem lehet páros, tehát ellentmondásra jutottunk, tehát $4 \mid g(m+1) - g(m)$ nem teljesülhet.

Így arra jutottunk, hogy minden m-re $g(m+1) - g(m)$ lehetséges értékei $1, -1, 2, -2$.

Ezután bebizonyítom, hogy egy adott t értéket, ha $t \neq 1$, akkor csak véges sokszor veheti föl a $g(m+1) - g(m)$ kifejezés. Tételezzük fel, hogy végtelen sok különböző m egész számra $g(m+1) - g(m) = t$. Vegyük észre, hogy

$$\big(g(m+1) + m\big)\big(g(m) + m + 1\big) = \big(g(m) + m + t\big)\big(g(m) + m + 1\big)$$

négyzetszám. Legyen $v = g(m) + m + 1$, mivel $v > m$, ezért tudjuk, hogy $v \cdot (v + t - 1)$ végtelen sok pozitív egész v-re négyzetszám.

Most két eset van.

1. eset: Ha $t - 1$ páros. Ekkor

$$\left(v + \frac{t-3}{2}\right)^2 < v \cdot (v + t - 1) < \left(v + \frac{t-1}{2}\right)^2,$$

ha v elég nagy, ami ellentmondás, hiszen ekkor $v \cdot (v + t - 1)$ nem lehet négyzetszám. A fenti egyenlőtlenség jobb oldala egyértelmű, a bal oldal azt jelenti, hogy

$$v^2 + (t-3)v + \left(\frac{t-3}{2}\right)^2 < v^2 + v(t-1), \quad \left(\frac{t-3}{2}\right)^2 < 2v,$$

ami teljesül, ha v elég nagy.

2. eset: Ha $t - 1$ páratlan. Ekkor

$$\left(v + \frac{t-2}{2}\right)^2 < v \cdot (v + t - 1) < \left(v + \frac{t}{2}\right)^2,$$

ha v elég nagy, ami ellentmondás, hiszen ekkor $v \cdot (v + t - 1)$ nem lehet négyzetszám. A fenti egyenlőtlenség jobb oldala egyértelmű, a bal oldal azt jelenti, hogy

$$v^2 + (t-2)v + \left(\frac{t-2}{2}\right)^2 < v^2 + v(t-1), \quad \left(\frac{t-2}{2}\right)^2 < v,$$

ami teljesül, ha v elég nagy.

Azt kaptuk, hogy egy t érték csak véges sokszor szerepelhet különbségként, ha $t \neq 1$. Így tehát a $-1, 2, -2$ értékek csak véges sokszor szerepelhetnek $g(m+1) - g(m)$ értékeként, vagyis egy korláttól kezdve minden m-re $g(m+1) = g(m) + 1$, azaz ha $m > N$, akkor $g(m) = m + c$ valamilyen konstans c-re.

Továbbá bebizonyítjuk, hogy akármilyen N-nél kisebb m egész számra is $g(m) = m + c$. Válasszunk egy olyan $n > N$ számot, amire $m + n + c = p$, ahol p egy prím, ekkor $\big(g(n) + m\big)\big(g(m) + n\big)$ négyzetszám, de $g(n) + m = p$, tehát $g(m) + n$ osztható p-vel, azaz $p \mid g(m) + n - p = g(m) - m - c$. Azt kaptuk, hogy $g(m) - m - c$ osztható végtelen sok elég nagy prímmel, amiből $g(m) = m + c$.

Így tehát minden pozitív egész m-re $g(m) = m + c$, ahol c egy egész szám, de nyilván nemnegatív. Ezek az egyedüli jó megoldások.