Nagy János megoldása. Rögtön látható, hogy a $g(n)=n+c$ alakú függvények megfelelnek a feltételnek, ahol c egy nemnegatív egész szám, hiszen ekkor a függvény értékkészlete megfelelő és

$$\big(g(m)+n\big)\big(m+g(n)\big)=(m+n+c)^2,$$

ami valóban mindig teljes négyzet.

Bebizonyítjuk, hogy csak ezek a jó függvények.

Nézzük meg, hogy egy tetszőleges pozitív egész m-re milyen értéket vehet fel a $g(m+1)-g(m)$ kifejezés. Először igazolom, hogy nem lehet 2-től különböző prímosztója. Indirekt módon tegyük fel, hogy valamilyen $p\neq 2$ prímre $p\mid g(m+1)-g(m)$ és legyen $g(m)=pl+r$, illetve $g(m+1)=pk+r$. Mivel $p>2$, azért kettőnél több maradékosztály van, tehát létezik biztosan olyan u pozitív egész, hogy sem $(u+l)$, sem $(u+k)$ nem osztható p-vel. Legyen $n=pu-r$.

A feladat feltételéből tudjuk, hogy $\big(g(m)+n\big)\big(m+g(n)\big)$ négyzetszám, tehát $p(l+u)\big(m+g(n)\big)$ négyzetszám. Tudjuk, hogy $(u+l)$ nem osztható p-vel, de p-nek páros kitevőn kell szerepelnie egy négyzetszámban, így $p\mid m+g(n)$.

Ugyanígy kapjuk m helyébe $(m+1)$-et írva, hogy $p\mid m+1+g(n)$, ebből $p\mid m+1+g(n)-m-g(n)=1$, ami ellentmondás. Így tehát azt kaptuk, hogy $g(m+1)-g(m)$-nek semmilyen m-re nem lehet 2-től különböző prímosztója.

Most bebizonyítom, hogy $g(m+1)-g(m)$ nem lehet osztható 4-gyel. Tételezzük fel indirekt módon, hogy $4\mid g(m+1)-g(m)$. Ekkor létezik olyan n pozitív egész szám, hogy $n+g(m)$ és $n+g(m+1)$ is kettő maradékot ad 4-gyel osztva.

Tudjuk, hogy $\big(g(m)+n\big)\big(m+g(n)\big)$ négyzetszám, de $g(m)+n$ osztható 2-vel, de 4-gyel nem, amiből $2\mid m+g(n)$. Ugyanígy kapjuk m helyébe $(m+1)$-et írva, hogy $2\mid m+1+g(n)$, két szomszédos egész szám mindegyike nem lehet páros, tehát ellentmondásra jutottunk, tehát $4\mid g(m+1)-g(m)$ nem teljesülhet.

Így arra jutottunk, hogy minden m-re $g(m+1)-g(m)$ lehetséges értékei 1, -1, 2, -2.

Ezután bebizonyítom, hogy egy adott t értéket, ha $t\neq 1$, akkor csak véges sokszor veheti föl a $g(m+1)-g(m)$ kifejezés. Tételezzük fel, hogy végtelen sok különböző m egész számra $g(m+1)-g(m)=t$. Vegyük észre, hogy

$$\big(g(m+1)+m\big)\big(g(m)+m+1\big)=\big(g(m)+m+t\big)\big(g(m)+m+1\big)$$

négyzetszám. Legyen $v=g(m)+m+1$, mivel $v>m$, ezért tudjuk, hogy $v\cdot(v+t-1)$ végtelen sok pozitív egész v-re négyzetszám.

Most két eset van.

1. eset: Ha $t-1$ páros. Ekkor

$$\left(v+\frac{t-3}{2}\right)^2<v\cdot(v+t-1)<\left(v+\frac{t-1}{2}\right)^2,$$

ha v elég nagy, ami ellentmondás, hiszen ekkor $v\cdot(v+t-1)$ nem lehet négyzetszám. A fenti egyenlőtlenség jobb oldala egyértelmű, a bal oldal azt jelenti, hogy

$$v^2+(t-3)v+\left(\frac{t-3}{2}\right)^2<v^2+v(t-1),\quad \left(\frac{t-3}{2}\right)^2<2v,$$

ami teljesül, ha v elég nagy.

2. eset: Ha $t-1$ páratlan. Ekkor

$$\left(v+\frac{t-2}{2}\right)^2<v\cdot(v+t-1)<\left(v+\frac{t}{2}\right)^2,$$

ha v elég nagy, ami ellentmondás, hiszen ekkor $v\cdot(v+t-1)$ nem lehet négyzetszám. A fenti egyenlőtlenség jobb oldala egyértelmű, a bal oldal azt jelenti, hogy

$$v^2+(t-2)v+\left(\frac{t-2}{2}\right)^2<v^2+v(t-1),\quad \left(\frac{t-2}{2}\right)^2<v,$$

ami teljesül, ha v elég nagy.

Azt kaptuk, hogy egy t érték csak véges sokszor szerepelhet különbségként, ha $t\neq 1$. Így tehát a -1, 2, -2 értékek csak véges sokszor szerepelhetnek $g(m+1)-g(m)$ értékeként, vagyis egy korláttól kezdve minden m-re $g(m+1)=g(m)+1$, azaz ha $m>N$, akkor $g(m)=m+c$ valamilyen konstans c-re.

Továbbá bebizonyítjuk, hogy akármilyen N-nél kisebb m egész számra is $g(m)=m+c$. Válasszunk egy olyan $n>N$ számot, amire $m+n+c=p$, ahol p egy prím, ekkor $\big(g(n)+m\big)\big(g(m)+n\big)$ négyzetszám, de $g(n)+m=p$, tehát $g(m)+n$ osztható p-vel, azaz $p\mid g(m)+n-p=g(m)-m-c$. Azt kaptuk, hogy $g(m)-m-c$ osztható végtelen sok elég nagy prímmel, amiből $g(m)=m+c$.

Így tehát minden pozitív egész m-re $g(m)=m+c$, ahol c egy egész szám, de nyilván nemnegatív. Ezek az egyedüli jó megoldások.