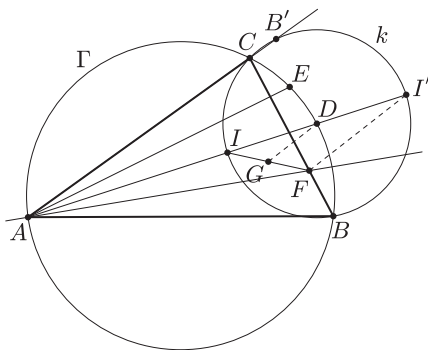


Nagy Donát megoldása. Legyen I tükörképe D -re I' , ekkor $ID = DI'$, és így $GD \parallel FI'$, hiszen GD középvonal az IFI' háromszögben. Mivel AD szögfelező az ABC háromszögben, a kerületi szögek tételéből $BD=DC$. Felhasználva, hogy BI és CI szögfelező az ABC háromszögben

$$BIC_{\triangleleft} = 180^{\circ} - ICB_{\triangleleft} - IBC_{\triangleleft} = 180^{\circ} - \frac{ACB_{\triangleleft}}{2} - \frac{ABC_{\triangleleft}}{2}, \quad \text{továbbá}$$

$$BDC_{\triangleleft} = 180^{\circ} - BAC_{\triangleleft} = ABC_{\triangleleft} + ACB_{\triangleleft},$$

hiszen $ABCD$ húrnégyszög. A D középpontú $DB = DC$ sugarú körön I rajta van, hiszen $BIC \sphericalangle = 180^\circ - \frac{BDC \sphericalangle}{2}$, és BC elválasztja D -t és I -t. Az II' nyilván ennek a k körnek az átmérője.



Legyen $FAI\triangleleft = IAE\triangleleft = \varphi$ (a két szög a feladat feltétele és $IAB\triangleleft = IAC\triangleleft$ miatt egyenlő). A kerületi szögek tétele szerint GD és EI metszéspontja pontosan akkor van Γ -n, ha

$$(\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{IE})_{\triangle} = \varphi = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})_{\triangle} = (\overrightarrow{AI'}, \overrightarrow{AE})_{\triangle}$$

(itt a megfelelő vektorok által bezárt irányított szögek egyenlőségét tekintem). Mivel $\overrightarrow{GD}$ és $\overrightarrow{FI'}$ egyirányúak, ez ekvivalens azzal, hogy

$$(\overrightarrow{AI'}, \overrightarrow{AE})_{\triangle} = \varphi = (\overrightarrow{FI'}, \overrightarrow{IE})_{\triangle}.$$

Tekintsük azt az A középpontú φ szögű nyújtva forgatást, ami F -et I -be viszi. Ez egy φ szöggel való nyújtva forgatás, I' képe az AE egyenesre, AI' képére esik, és a bizonyítandó ekvivalens azzal, hogy FI' képe IE , tehát hogy I' képe E . Az I' képe pontosan akkor E , ha $AF : AI = AI' : AE$, azaz $AE \cdot AF = AI \cdot AI'$.

Mivel $\angle BAF = \angle EAC$ és a kerületi szögek tételéből:

$$CEA_{\triangleleft} = CBA_{\triangleleft}, \quad ABF \sim AEC, \quad AB : AF = AE : AC, \quad AE \cdot AF = AB \cdot AC.$$

Így az állítás pontosan akkor teljesül, ha $AB \cdot AC = AI \cdot AI'$. Legyen B' a B pont tükörképe AD -re; ekkor $BAD \sphericalangle = DAC \sphericalangle$ miatt B' az AC egyenesen van, $BD = B'D$ miatt B' a k körön van, és $B' = C$ (akkor és) csak akkor teljesül, ha $AB = AC$, de ekkor a kerületi szögek tételéből:

$$ACD\angle = ACB\angle + DAB\angle = ACB\angle + \frac{180^\circ - 2ACB\angle}{2} = 90^\circ,$$

így a k kör $B' = C$ -ben érinti az AC egyenest. Ezekből következik, hogy A -nak a k -ra vonatkozó hatványa $AI \cdot AI' = AC \cdot AB' = AC \cdot AB$, és ezzel készen vagyunk.