

**Megoldás.** A hagyományos és a trigonometrikus háromszög területképlet és a szinusz-tétel felhasználásával:

$$\frac{m_a}{a} = \frac{2T}{a^2} = \frac{ab \cdot \sin \gamma}{a^2} = \frac{b \cdot \sin \gamma}{a} = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Hasonlóan:

$$\frac{m_b}{b} = \frac{\sin \gamma \sin \alpha}{\sin \beta} \quad \text{és} \quad \frac{m_c}{c} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Az addíciós képleteket felírva:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta, \quad \sin 2\gamma = 2 \sin \gamma \cos \gamma.$$

Ezeket behelyettesítve az egyenlőtlenségbe és a műveleteket elvégezve az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha} + \frac{\sin \gamma \sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma} \geq \frac{\cos \beta \cos \gamma}{\sin \alpha} + \frac{\cos \gamma \cos \alpha}{\sin \beta} + \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \gamma} + \sqrt{3}.$$

A bal és a jobb oldal első tagjának különbségét átalakítva:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha} - \frac{\cos \beta \cos \gamma}{\sin \alpha} &= \frac{\sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \alpha} = \frac{-\cos(\beta + \gamma)}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{\cos(\pi - (\beta + \gamma))}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Ezt hasonlóan elvégezve a második és harmadik taggal, majd a kapott eredményt beírva az egyenlőtlenségbe:  $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq \sqrt{3}$ . A kotangens függvény a  $]0; \frac{\pi}{2}[$  intervallumon szigorúan konvex. Ezért felírhatjuk rá a Jensen-egyenlőtlenséget:

$$\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma}{3} \geq \operatorname{ctg} \left( \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

amiből  $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq \sqrt{3}$ . Az egyenlőség a Jensen-egyenlőtlenségben akkor áll fenn, ha  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ .

Ezzel az állítást igazoltuk.