

Megoldás. Használjuk az

$$S_k = x^k - y^k$$

jelölést minden k pozitív egészre; legyen továbbá $x + y = a$ és $xy = b$. Az ismert azonosság szerint

$$\sum_{k=0}^{20} x^{20-k} y^k = \frac{S_{21}}{x-y} = \frac{S_{21}}{S_1}.$$

Ha $n > 1$, akkor

$$S_{n+1} = x^{n+1} - y^{n+1} = (x^n - y^n)(x + y) - (x^n y - x y^n) = a S_n - b S_{n-1}.$$

Ezt alkalmazva $n = 1, 2, \dots, 6$ -ra:

$$\begin{aligned} S_1 &= x - y, \\ S_2 &= a(x - y) = aS_1, \\ S_3 &= a^2(x - y) - b(x - y) = (a^2 - b) S_1, \\ S_4 &= a(a^2 - b) S_1 - baS_1 = (a^3 - 2ab) S_1, \\ S_5 &= a(a^3 - 2ab) S_1 - b(a^2 - b) S_1 = (a^4 - 3a^2b + b^2) S_1, \\ S_6 &= a(a^4 - 3a^2b + b^2) S_1 - b(a^3 - 2ab) S_1 = (a^5 - 4a^3b + 3ab^2) S_1, \\ S_7 &= a(a^5 - 4a^3b + 3ab^2) S_1 - b(a^4 - 3a^2b + b^2) S_1 = (a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3) S_1. \end{aligned}$$

Végül

$$S_{21} = x^{21} - y^{21} = (x^7)^3 - (y^7)^3 = (x^7 - y^7) \left((x^7)^2 + x^7 y^7 + (y^7)^2 \right) = S_7 (S_7^2 + 3b^7)$$

alapján

$$\begin{aligned} \frac{S_{21}}{x-y} &= (a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3)^3 S_7^2 + 3b^7 (a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3) = \\ &= (a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3)^3 (a^2 - 4b) + 3b^7 (a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3). \end{aligned}$$

Így a keresett polinom

$$\begin{aligned} p(z, t) &= (z^6 - 5z^4t + 6z^2t^2 - t^3)^3 (z^2 - 4t) + 3t^7 (z^6 - 5z^4t + 6z^2t^2 - t^3) = \\ &= z^{20} - 19z^{18}t + 153z^{16}t^2 - 680z^{14}t^3 + 1820z^{12}t^4 - 3003z^{10}t^5 + 3003z^8t^6 - \\ &\quad - 1716z^6t^7 + 495z^4t^8 - 55z^2t^9 + t^{10}. \end{aligned}$$

Megjegyzés. Általában, a

$$p_n(x + y, xy) = \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k$$

követelményt kielégítő $p_n = p_n(z, t)$ polinomokra a megoldásban alkalmazott $S_{n+1} = aS_n - bS_{n-1}$ rekurzió megfelelőjeként teljesülő

$$p_{n+1}(z, t) = z p_n(z, t) - t p_{n-1}(z, t)$$

rekurzió segítségével, az n -re vonatkozó indukcióval belátható, hogy

$$p_n(z, t) = \sum_{i=0}^{[n/2]} (-1)^i \binom{n-i}{i} z^{n-2i} t^i.$$