

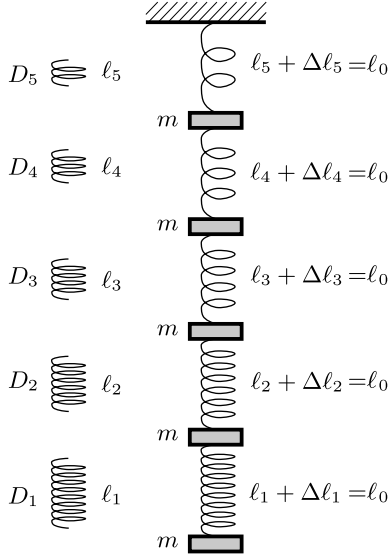
I. megoldás. Jelöljük a feldarabolás után kapott rugók nyújtatlan hosszát ℓ_k -val, a rugóállandókat pedig D_k -val ($k = 1, 2, \dots, n$). Az egyes rugódarabok rugóállandója fordítottan arányos a rugók hosszával, vagyis a megfelelő rugóhosszak és rugóállandók szorzata állandó:

$$\ell_1 D_1 = \ell_2 D_2 = \dots = \ell_n D_n = DL,$$

és így az egyes darabok rugóállandója kifejezhető az eredeti rugó adataival:

$$D_k = \frac{DL}{\ell_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

a) Függesszük fel a rugókat és a nehezékeket a feladatban megadott módon, és számozzuk meg a rugókat lentől felfelé, ahogy azt az *ábra* mutatja.



A k -adik rugót az alatta lévő összes test súlya, tehát $k \cdot mg$ erő húzza, így a megnyúlása:

$$\Delta \ell_k = \frac{k \cdot mg}{D_k} = \frac{k \cdot mg}{DL} \ell_k = k \cdot \ell_k.$$

(Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $DL = mg$.) A megnyúlt rugók hossza (a kialakuló egyensúlyi állapotban) azonos ℓ_0 nagyságú, vagyis fennáll:

$$2\ell_1 = 3\ell_2 = 4\ell_3 = 5\ell_4 = 6\ell_5.$$

Fejezzük ki ℓ_5 segítségével a többi rugó nyújtatlan hosszát:

$$\ell_1 = 3\ell_5, \quad \ell_2 = 2\ell_5, \quad \ell_3 = \frac{3}{2}\ell_5, \quad \ell_4 = \frac{6}{5}\ell_5,$$

és mivel fennáll

$$\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 = \left(3 + 2 + \frac{3}{2} + \frac{6}{5} + 1\right) \ell_5 = \frac{87}{10} \ell_5 = L,$$

a legfelső rugó hosszára $\ell_5 = \frac{10}{87}L$ adódik. Hasonló módok kapjuk a többi rugódarab hosszát is:

$$\ell_1 = \frac{30}{87}L, \quad \ell_2 = \frac{20}{87}L, \quad \ell_3 = \frac{15}{87}L, \quad \ell_4 = \frac{12}{87}L.$$

Az eredeti rugót tehát ($n = 5$ esetén) $30 : 25 : 15 : 12 : 10$ arányban kell feldarabolnunk, így érhetjük el, hogy a terhelés után a hosszuk ugyanakkora legyen.

b) A rendszer tömegközéppontja eddig a középső test tömegközéppontjával azonos helyen, a rugók felfüggesztésétől $3\ell_0 = 18\ell_1 = \frac{60}{29}L$ távolságra volt. Ha most a rugósor alját δ távolsággal lehúzzuk, akkor mindegyik kis rugót feszítő erő ugyanakkora $F = D\delta$ értékkel növekszik, ennek hatására a megnyúlásuk valamekkora (rugónként különböző nagyságú) δ_k értékkel megnő. Felírhatjuk, hogy

$$F = D\delta = D_k \delta_k = \frac{DL}{\ell_k} \delta_k, \quad \text{vagyis} \quad \delta_k = \frac{\ell_k}{L} \delta,$$

azaz

$$\delta_1 = \frac{30}{87} \delta, \quad \delta_2 = \frac{20}{87} \delta, \quad \delta_3 = \frac{15}{87} \delta, \quad \delta_4 = \frac{12}{87} \delta, \quad \delta_5 = \frac{10}{87} \delta.$$

A rugók megnyúlásából kiszámíthatjuk, hogy mennyivel kerülnek mélyebbre az egyes testek:

$$\begin{aligned} \Delta h_5 &= \delta_5 = \frac{10}{87} \delta, & \Delta h_4 &= \delta_5 + \delta_4 = \frac{22}{87} \delta, & \Delta h_3 &= \delta_5 + \delta_4 + \delta_3 = \frac{37}{87} \delta, \\ \Delta h_2 &= \delta_5 + \delta_4 + \delta_3 + \delta_2 = \frac{57}{87} \delta, & \Delta h_1 &= \delta_5 + \delta_4 + \delta_3 + \delta_2 + \delta_1 = \frac{87}{87} \delta = \delta. \end{aligned}$$

A felső két test tömegközéppontja

$$\Delta H_{(4,5)} = \frac{\Delta h_5 + \Delta h_4}{2} = \frac{16}{87} \delta$$

távolsággal, az alsó két test tömegközéppontja pedig

$$\Delta H_{(1,2)} = \frac{\Delta h_1 + \Delta h_2}{2} = \frac{72}{87} \delta$$

távolsággal kerül mélyebbre, a négy testből álló, $4m$ tömegű alrendszer tömegközéppontjának elmozdulása

$$\Delta H_{(1,2,4,5)} = \frac{H_{(1,2)} + H_{(4,5)}}{2} = \frac{44}{87} \delta.$$

Ha figyelembe vesszük még a középső (m tömegű) test Δh_3 elmozdulását is, megkapjuk az egész rendszer tömegközéppontjának (amely $4 : 1$ arányban osztja az m és a $4m$ tömegű részek közötti távolságot) keresett elmozdulását:

$$\Delta h_{\text{rendszer}} = \frac{4}{5} \Delta H_{1,2,4,5} + \frac{1}{5} \Delta h_3 = \frac{71}{145} \delta \approx 0,49 \delta.$$

II. megoldás. *b)* A feladat második része a munkatétel segítségével is megoldható. Ha a legalsó testet δ távolsággal lejjebb húzzuk, az ehhez szükséges F erő fokozatosan változik nulla és $D\delta$ között (hiszen a sorba kötött kis rugók együttese a szétadarabolás előtti, D direkciós erejű rugóval egyenértékű). A lehúzáskor végzett

$$W = F_{\text{átlagos}} \delta = \frac{1}{2} D \delta^2$$

munka egyrészt a rendszer helyzeti energiájának megváltozását, másrészt a rugók rugalmas energiájának növekedését fedezi:

$$W = \Delta E_{\text{helyzeti}} + \Delta E_{\text{rugalmas}}, \quad \text{ahol} \quad \Delta E_{\text{helyzeti}} = -5mg \Delta h$$

(Δh a rendszer tömegközéppontjának keresett süllyedése), a rugók energiájának megváltozása pedig (az I. megoldás jelöléseit használva):

$$\Delta E_{\text{rugalmas}} = \sum_{k=1}^n \frac{D_k}{2} [(\Delta \ell_k + \delta_k)^2 - (\Delta \ell_k)^2] = \sum_{k=1}^n D_k \left(\Delta \ell_k \delta_k + \frac{1}{2} (\delta_k)^2 \right).$$

Tudjuk, hogy $D_k = \frac{DL}{\ell_k}$, $\Delta \ell_k = k \ell_k$ és $\delta_k = \frac{\ell_k}{L} \delta$, innen kapjuk, hogy

$$\Delta E_{\text{rugalmas}} = D\delta \sum_{k=1}^n k \ell_k + \frac{1}{2} D\delta^2 \sum_{k=1}^n \frac{\ell_k}{L}.$$

A jobb oldal második tagja éppen W -vel egyezik meg, így – a munkatétel egyenlete szerint – a tömegközéppont lesüllyedése ($mg = DL$ és $n = 5$ esetén):

$$\Delta h = \frac{\delta}{L} \sum_{k=1}^5 k \ell_k = \left(1 \cdot \frac{30}{87} + 2 \cdot \frac{20}{87} + 3 \cdot \frac{15}{87} + 4 \cdot \frac{12}{87} + 5 \cdot \frac{10}{87} \right) \delta = \frac{71}{145} \delta.$$