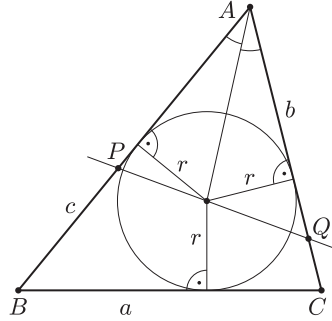


I. megoldás. Jelölje a háromszög csúcsait a szokásos módon A , B és C , a beírt kör középpontját O , sugarát r , az A -nál lévő szög pedig legyen α (1. ábra).



1. ábra

Írjuk fel az APQ háromszög területét kétféleképpen:

$$T_{APQ} = \frac{pq \sin \alpha}{2} \quad \text{és} \quad T_{APQ} = T_{APO} + T_{AOQ} = \frac{pr}{2} + \frac{qr}{2} = \frac{(p+q)r}{2}.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$(1) \quad pq \sin \alpha = (p+q)r.$$

Az ABC háromszög területét kétféleképpen felírva pedig:

$$T_{ABC} = \frac{(a+b+c)r}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2},$$

azaz

$$(2) \quad (a+b+c)r = bc \sin \alpha$$

adódik. Az (1) és (2) egyenlőségek megfelelő oldalait összeszorozva kapjuk, hogy

$$pq \sin \alpha \cdot (a+b+c)r = (p+q)r \cdot bc \sin \alpha,$$

amiből $bcpqr \sin \alpha \neq 0$ -val való osztás és rendezés után a bizonyítandó

$$\frac{a+b+c}{bc} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

egyenlőséget kapjuk.

II. megoldás. Először belátunk egy segédtelet.

Ha valamely M csúcsú szög szögfelezőjének rögzített T pontján átmenő tetszőleges egyenes a szög szárait a K és L pontokban metszi, akkor az $1/MK + 1/ML$ kifejezés értéke független a szelőegyenes helyzetétől.

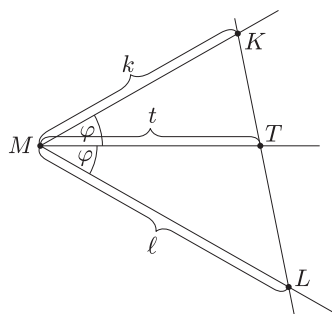
Legyen a szög nagysága 2φ , $MT = t$, $MK = k$ és $ML = \ell$ (2. ábra). Ekkor

$$\begin{aligned} k\ell \sin 2\varphi &= 2T_{MKL} = 2T_{MTK} + 2T_{MTL} = \\ &= tk \sin \varphi + t\ell \sin \varphi. \end{aligned}$$

Ebből rendezés után

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{\ell} = \frac{\sin 2\varphi}{t \sin \varphi}$$

adódik, ami bizonyítja segédteletünk állítását.



2. ábra

Ezután eredeti feladatunk megoldása már egyszerű. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, továbbá legyen a B -ből induló szögfelező és az AC oldal metszéspontja D . A szögfelezőtétel szerint D a c és a oldalak arányában osztja az AC szakaszt, ezért $AD = \frac{cb}{c+a}$. Másrészt O rajta van az ABC szögfelezőin, ezért a BAC szögre és az O pontra alkalmazhatjuk segédtételünket. E szerint

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{c} + \frac{1}{\frac{cb}{c+a}} = \frac{1}{c} + \frac{c+a}{cb} = \frac{a+b+c}{bc},$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.