**I. megoldás.** A nevezőben nem lehet nulla, így $x \neq \frac{1}{2}$. A egyenlet bal oldalán két köb összege szerepel, amelynek a felírásához az összeg köbét használjuk majd fel. Ennek érdekében írjuk fel először a bal oldalon szereplő $x$ és $\frac{x}{2x-1}$ összegének köbét. Egyrészt

$$\left(x+\frac{x}{2x-1}\right)^3=\left(\frac{(2x-1)x+x}{2x-1}\right)^3=\left(\frac{2x^2}{2x-1}\right)^3,$$

másrészt a köbös azonosság alapján, az egyenletet felhasználva

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{x}{2x-1}\right)^3&=x^3+\left(\frac{x}{2x-1}\right)^3+3x^2\frac{x}{2x-1}+3x\left(\frac{x}{2x-1}\right)^2=\\&=\frac{243}{64}+3\left(\frac{x^3}{2x-1}+\frac{x^3}{(2x-1)^2}\right)=\\&=\frac{243}{64}+3\left(\frac{(2x-1)x^3+x^3}{(2x-1)^2}\right)=\frac{243}{64}+3\left(\frac{2x^4}{(2x-1)^2}\right).\end{aligned}$$

A kétféle felírás egybevetésével

$$\left(\frac{2x^2}{2x-1}\right)^3=\frac{243}{64}+3\left(\frac{2x^4}{(2x-1)^2}\right).$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 64-gyel, majd ezután vezessük be az $y$ új ismeretlent az $\frac{8x^2}{2x-1}$ helyett:

$$64\left(\frac{2x^2}{2x-1}\right)^3=243+3\cdot 64\left(\frac{2x^4}{(2x-1)^2}\right),\quad y^3-6y^2-243=0.$$

Ha az egyenletnek van racionális gyöke, amely $y=\frac{p}{q}$ alakban áll elő, akkor $p \mid a_0=-243$ és $q \mid a_3=1$, tehát a racionális gyök egész. Mivel $243=3^5$, legfeljebb öt próbálkozás után látható, hogy ennek az egyenletnek $y=9$ megoldása, mert

$$9^3-6\cdot 81-243=729-486-243=0.$$

A megtalált gyök ismeretében alakítsuk szorzattá az egyenletet:

$$(y-9)\left(y^2+3y+27\right)=0.$$

A második tényező nem lehet nulla, mert az $y^2+3y+27=0$ egyenlet diszkriminánsa negatív. Tehát $y$-ra egyedüli megoldás az $y=9$. Visszahelyettesítve

$$\frac{8x^2}{2x-1}=9,\qquad 8x^2-18x+9=0.$$

Ennek az egyenlet a gyökei megoldóképlettel már számolhatók:

$$x_1=\frac{3}{4}\quad\text{és}\quad x_2=\frac{3}{2},$$

amelyek – mint arról behelyettesítéssel meggyőződhetünk – valóban megoldásai is az egyenletnek.

**II. megoldás.** Legyen $y=\frac{x}{2x-1}$. Ezt átrendezve

$$x=2xy-y,\qquad 2xy=x+y.$$

Látjuk, hogy amennyiben $x+y=a$, úgy $2xy=a$. Ezzel az új jelöléssel az eredeti egyenlet bal oldala

$$x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=a\left(a^2-3xy\right)=a\left(a^2-\frac{3}{2}a\right).$$

Behelyettesítve, 64-gyel szorozva és rendezve a

$$64a^3-96a^2-243=0$$

alakú egész együtthatós harmadfokú egyenletet kapjuk. Az első megoldásnál már megismert eljárás szerint, ha az egyenletnek van racionális gyöke, akkor annak számlálója a 243-nak, nevezője pedig a 64-nek osztója. Ebből néhány próbálkozással látható, hogy $a=\frac{9}{4}$ megoldása az egyenletnek, kiemelhető a $(4a-9)$ tényező az egyenletből:

$$(4a-9)\left(16a^2+12a+27\right)=0.$$

A $16a^2+12a+27=0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, nincs valós gyöke. A harmadfokú egyenlet egyetlen valós gyöke tehát $a=\frac{9}{4}$. Innen

$$2xy=x\left(\frac{x}{2x-1}\right)=\frac{9}{4}, \qquad 8x^2-18x+9=0, \qquad x_1=\frac{3}{2} \text{ és } x_2=\frac{3}{4}.$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy mindkét tört valóban megoldása az eredeti egyenletnek.