

Megoldás. Az $n = 1$ nyilván megoldás, mivel $d(1^3) = d(1) = 1$.

$n \neq 1$ esetén legyen n prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, ahol minden $\alpha_i > 0$ és $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ prímek. Az osztók számára vonatkozó ismert összefüggés alapján

$$d(n^3) = d((p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k})^3) = (3\alpha_1 + 1)(3\alpha_2 + 1) \dots (3\alpha_k + 1).$$

A feladatban szereplő egyenlet így a következő formában írható fel:

$$(3\alpha_1 + 1)(3\alpha_2 + 1) \dots (3\alpha_k + 1) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

A bal oldal minden zárójelében 3-mal osztva 1 maradékot adó szám áll, így a szorzat is 1 maradékot ad 3-mal osztva. Ezek szerint a prímek között nem szerepelhet a 3. Az egyenletet törtes alakban átírhatjuk:

$$(1) \quad \frac{3\alpha_1 + 1}{p_1^{\alpha_1}} \cdot \frac{3\alpha_2 + 1}{p_2^{\alpha_2}} \cdot \dots \cdot \frac{3\alpha_k + 1}{p_k^{\alpha_k}} = 1.$$

Mivel a bal oldali (pozitív) tényezők szorzata 1, a tényezők között van olyan, amely legalább 1, vagyis van olyan j , amelyre

$$1 \leq \frac{3\alpha_j + 1}{p_j^{\alpha_j}}.$$

Először vizsgáljuk meg a $p_j \neq 2$ esetet. Ekkor (mivel $p_j \neq 3$), $5 \leq p_j$, tehát

$$1 \leq \frac{3\alpha_j + 1}{p_j^{\alpha_j}} \leq \frac{3\alpha_j + 1}{5^{\alpha_j}}.$$

$\alpha_j = 1$ -re az $1 \leq \frac{3\alpha_j + 1}{5^{\alpha_j}}$ egyenlőtlenség nem teljesül, így semmilyen $1 < \alpha_j$ -re sem teljesül, mivel a $\frac{3\alpha + 1}{5^\alpha}$ sorozat szigorúan monoton csökken, hiszen

$$\begin{aligned} \frac{3\alpha + 1}{5^\alpha} &> \frac{3\alpha + 4}{5^{\alpha+1}}, \\ 5(3\alpha + 1) &> 3\alpha + 4, \\ 12\alpha + 1 &> 0. \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy $p_j \neq 2$ esetén $1 \leq \frac{3\alpha_j + 1}{p_j^{\alpha_j}}$ nem teljesülhet. Következésképpen n prímtényezős felbontásában szerepel a 2, melynek α_1 kitevőjére

$$1 \leq \frac{3\alpha_1 + 1}{2^{\alpha_1}}.$$

Az egyenlőtlenség $\alpha_1 = 1, 2, 3$ -ra teljesül, $\alpha_1 = 4$ -re viszont nem. Így, mivel a $\frac{3\alpha + 1}{2^\alpha}$ sorozat pozitív α esetén szigorúan monoton csökken (ez a fenti, $\frac{3\alpha + 1}{5^\alpha}$ sorozatnál látott módon belátható), $\alpha_1 > 4$ -re sem igaz. Ezzel beláttuk, hogy

$$n = 2 \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \quad \text{vagy} \quad n = 2^2 \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \quad \text{vagy} \quad n = 2^3 \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

a) $n = 2 \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ esetén

$$n = d(n^3) = 4 \cdot (3\alpha_2 + 1) \dots (3\alpha_k + 1),$$

ahonnan n osztható 4-gyel. Ezek szerint ez az eset nem lehetséges, mert az n prímtényezős felbontásában a 2 csak első hatványon szerepel.

b) $n = 2^2 \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ esetén

$$n = d(n^3) = 7 \cdot (3\alpha_2 + 1) \dots (3\alpha_k + 1),$$

így n prímtényezős felbontásában szerepel a 7. Ha első hatványon szerepel, és több prímosztója nincs n -nek, akkor $n = 2^2 \cdot 7 = 28$, melyre $d(n^3) = (3 \cdot 2 + 1)(3 \cdot 1 + 1) = 28$, tehát ez megoldás. Ha az n prímtényezős felbontásában a 7 az 1-nél nagyobb hatványon szerepelne, vagy más prímosztói is lennének n -nek, akkor az (1) egyenlőség nem teljesülhetne, hiszen a bal oldalon álló kifejezést biztosan csökkentenénk, így kisebb lenne 1-nél (ha a 7 nagyobb hatványon szerepelne, akkor azért, mert a $p_i(\alpha) = \frac{3\alpha + 1}{p_i^\alpha}$ sorozat szigorúan monoton csökken, ha pedig n prímtényezős felbontásában más

prímek is szerepelnének, akkor azért, mert $\frac{3\alpha_i + 1}{p_i^{\alpha_i}} < 1$, ha $p_i \neq 2$). Így ebben az esetben $n = 28$ az egyetlen megoldás.

c) $n = 2^3 \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ esetén

$$n = d(n^3) = 10 \cdot (3\alpha_2 + 1) \dots (3\alpha_k + 1),$$

tehát az n prímtényezős felbontásában szerepel az 5. Az $n = 2^3 \cdot 5 = 40$ megoldása a feladatnak, más megoldás pedig ebben az esetben sincs (ugyanúgy csak csökkenteni tudnánk (1)-ben a bal oldal értékét, ahogyan az előző részben).

Ezzel beláttuk, hogy a feladat megoldásai $n = 1$, $n = 28$ és $n = 40$.