

I. megoldás. Próbáljuk meg a bal oldalt teljes négyzetek összegeként vagy különbségeként felírni. Mivel szerepel benne $2xy$ és $-2x$, nézzük meg, mi marad, ha az $(x + y - 1)^2$ kifejezést beírjuk:

$$\begin{aligned} x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 20 &= (x + y - 1)^2 - 4y^2 - 8y + 19 = \\ &= (x + y - 1)^2 - (2y + 2)^2 + 23. \end{aligned}$$

Tehát az egyenlet így alakul:

$$\begin{aligned} (x + y - 1)^2 - (2y + 2)^2 &= -23, \\ (x + y - 1 + 2y + 2)(x + y - 1 - 2y - 2) &= -23, \\ (x + 3y + 1)(x - y - 3) &= -23. \end{aligned}$$

A -23 kétféleképpen áll elő két egész szám szorzataként: $-23 = (-1) \cdot 23 = 1 \cdot (-23)$.

I. eset: $x + 3y + 1 = -1$, $x - y - 3 = 23$. Az elsőből a másodikat kivonva: $4y + 4 = -24$, amiből $y = -7$, és innen $x = 19$.

II. eset: $x + 3y + 1 = 1$, $x - y - 3 = -23$. Ebből $4y + 4 = 24$, amiből $y = 5$ és $x = -15$ következik.

III. eset: $x + 3y + 1 = 23$, $x - y - 3 = -1$. Innen $4y + 4 = 24$, amiből $y = 5$ és $x = 7$ következik.

IV. eset: $x + 3y + 1 = -23$, $x - y - 3 = 1$, ahonnan $4y + 4 = -24$, és így $y = -7$ és $x = -3$ következik.

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, így a négy megoldás: $(x_1; y_1) = (19; -7)$, $(x_2; y_2) = (-15; 5)$, $(x_3; y_3) = (7; 5)$, $(x_4; y_4) = (-3; -7)$.

II. megoldás. Írjuk fel a másodfokú egyenlet megoldóképletét x -re:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 20 = x^2 + 2(y - 1)x - 3y^2 - 10y + 20, \\ x_{1;2} &= \frac{-2(y - 1) \pm \sqrt{4(y - 1)^2 - 4(-3y^2 - 10y + 20)}}{2} = \\ &= -y + 1 \pm \sqrt{y^2 - 2y + 1 + 3y^2 + 10y - 20} = -y + 1 \pm \sqrt{4y^2 + 8y - 19}. \end{aligned}$$

Az y egész szám, ezért x akkor egész, ha a gyök alatt négyzetszám áll: $4y^2 + 8y - 19 = n^2$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$. Ezt tovább alakítva: $(2y + 2)^2 - 23 = n^2$, azaz $(2y + 2)^2 - n^2 = 23$. Mivel $2y + 2$ és n is egész, két olyan négyzetszámot keresünk, melyek különbsége 23. A négyzetszámok sorozata az első 13 elemig felírva:

$$0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; 121; 144.$$

A különbség ezután csak nő, ezért az egyetlen megoldás (a nem szomszédos elemeket is végignézzve) a $144 - 121 = 23$.

Tehát $(2y + 2)^2 = 121 + 23 = 144$, amiből $2y + 2 = \pm 12$.

I. eset: $2y + 2 = 12$, ebből $y = 5$ és $x_{1;2} = -5 + 1 \pm \sqrt{4 \cdot 25 + 8 \cdot 5 - 19} = 4 \pm 11$, $x_1 = 7$ és $x_2 = -15$.

II. eset: $2y + 2 = -12$, ebből $y = -7$ és $x_{3;4} = 7 + 1 \pm \sqrt{4 \cdot 49 - 8 \cdot 7 - 19} = 8 \pm 11$, $x_3 = 19$ és $x_4 = -3$.

Az egyenlet megoldásai: $(7; 5)$, $(-15; 5)$, $(19; -7)$, $(-3; -7)$.