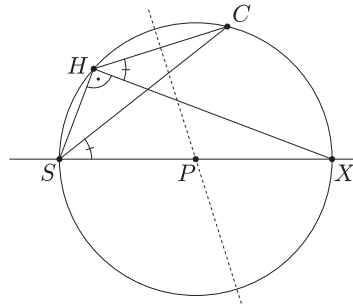
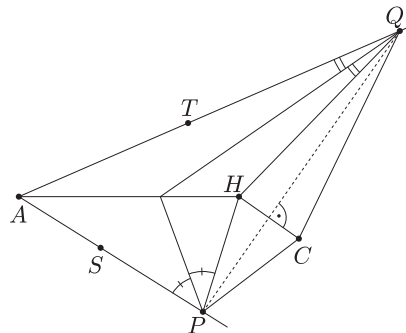


Fehér Zsombor megoldása. Mindenekelőtt a $\angle CHS + \angle CSB = 90^\circ$ feltételt fogjuk értelmezni. Ehhez vegyük fel az AB egyenesen azt az X pontot, melyre $\angle SHX = 90^\circ$ (1. ábra). Ekkor $\angle CHX = \angle CHS + 90^\circ = \angle CSB$. Tehát $\angle CHX = \angle CSX$, így $CHSX$ húrnégyszög. És mivel $\angle SHX = 90^\circ$, ezért a Thalész-tétel alapján a $CHSX$ kör középpontja SX felezőpontja, ami legyen P .



1. ábra

A TSH háromszög körülírt körének középpontját az SH és TH oldalak szakaszfelező merőlegesének metszéspontjaként fogjuk meghatározni (2. ábra). SH felezőmerőlegese ugyanaz, mint SPH szögfelezője, hiszen PSH egyenlőszárú háromszög. Ezáltal az ábra már is sokat egyszerűsödött: csak vesszük HC felezőmerőlegesét, ez P -ben és Q -ban metszi AB -t és AD -t, majd tekintjük a HPA és HQA szögfelezőjét (a belső szögfelezőt, mert az S és a T pont az AP , illetve az AQ szakasz belsejében helyezkedik el). Azt kell belátnunk, hogy ezek metszéspontja rajta van az AH szakaszon, hiszen ekkor $AH \perp BD$ miatt BD valóban érinteni fogja a THS kört.



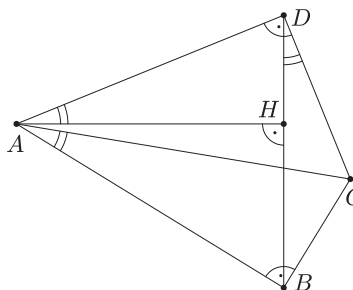
2. ábra

Lemma. Tetszőleges $KLMN$ négyszögre a K -ból és M -ből kiinduló belső szögfelezők pontosan akkor metszik egymást az LN átlón, mint amikor az L -ből és N -ből kiinduló szögfelezők a KM átlón.

Bizonyítás. A szögfelezőtétel alapján, ha a K , M szögfelezők mindketten az O pontban metszik LN -t, akkor $KL/KN = OL/ON = ML/MN$. Így $KL/ML = KN/MN$ alapján az L , N szögfelezők ugyanolyan arányban osztják a KM szakaszt, azaz ugyanott metszik a KM átlót. Vagyis mindkettő pontosan akkor teljesül, ha a négyszög szemközti oldalainak szorzata egyenlő.

A lemmát alkalmazva az $APHQ$ négyszögre, azt kell belátnunk, hogy a PAQ és PHQ szögfelezője a PQ egyenesen metszi egymást.

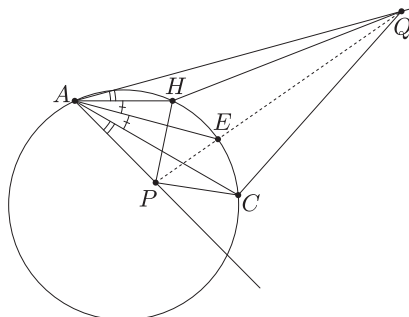
Még nem használtuk a feladat $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$ feltételét (3. ábra). Ez alapján $ABCD$ húrnégyszög, így $\angle BAC = \angle BDC = 90^\circ - \angle ADH = \angle HAD$.



3. ábra

Megjegyzés. A feladat B és D pontját, illetve az ott lévő derékszögeket tulajdonképpen csak arra használjuk, hogy $\angle BAC = \angle HAD$ teljesüljön. Valójában a C pontot szabadon mozgathatjuk az AC egyenesen, az állítás érvényben marad.

Legyen az AHC kör és a PQ egyenes metszéspontja E (4. ábra). Mivel HC felezőmerőlegesén van E , a HC ív felezőpontja E , ezért $HAE\angle = EAC\angle$. És mivel $QAH\angle = CAP\angle$, a QAP szögfelezője nem más, mint AE . Az AHC kör középpontja rajta van HC felezőmerőlegesén, PQ -n, ezáltal a kör tükrös PQ -ra. Azon pontok halmaza, melyek P -től és Q -től mért távolságainak aránya állandó, és ez az állandó AP/AQ , egy Apollóniusz-kör. Mégpedig egy olyan Apollóniusz-kör, ami átmegy A -n, és a szögfelezőtétel miatt E -n, emellett tükrös a PQ egyenesre. Így ez a kör csak az AHC kör lehet. Tehát H is rajta van az Apollóniusz-körön, így $HP/HQ = AP/AQ$, és $PHQ\angle$ szögfelezője is átmegy E -n. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.



4. ábra

Megjegyzések. 1. Amennyiben az A, H, C pontok egy egyenesre esnek, az Apollóniusz-kör helyét egy felező merőleges veszi fel. Ebben az esetben az egész ábra szimmetrikus, a feladat állítása pedig triviális. Annak ellenére, hogy ráadásul a fenti bizonyítás is lényegében ugyanúgy működik, a versenyzők ezen megjegyzés hiányában – mint minden speciális eset elmulasztásáért – maximálisan 6 pontot kaphattak.

2. A megoldás utolsó lépésének alapja a következő egyszerű, de mégis meglepő tétel, amit érdemes lehet megjegyezni:

Tétel. Ha $ABCD$ deltoid, akkor a $\{P \mid APB\angle \equiv DPC\angle \pmod{180^\circ}\}$ halmaz, vagyis azon pontok mértani helye, melyekből az AB és DC szakaszok ugyanakkora irányított szögben látszanak, egy kör és egy egyenes (rombusz esetén két egyenes). A kör a fent látott Apollóniusz-kör, az egyenes pedig a deltoid szimmetriatengelye.

Ezt a tételt alkalmaztuk feladatunkban a $PHQC$ deltoidra: mivel $PAC\angle = HAQ\angle$, ezért $AP/AQ = HP/HQ$, készen vagyunk. Ugyanakkor a tétel használatával pl. Lapunk **B. 4448.** feladata (2012. április) is könnyen adódik – ezt Olvasónkra bízunk, hogyan.