

Homonnay Bálint megoldása. Tegyük fel, hogy egy n -re

$$\frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Szorozva n -nel, hozzáadva a_{n+1} -et és osztva $n+1$ -gyel azt kapjuk, hogy

$$\frac{a_0 + a_1 + \dots + a_{n+1}}{n+1} \leq a_{n+1},$$

tehát ha n -re igaz az állítás, akkor $n+1$ -re nem lehet az. Mivel a sorozat szigorúan monoton nő, ezért semmilyen n -nél nagyobb számra nem lehet igaz, tehát legfeljebb egy számra lehet igaz az állítás.

Mivel $a_1 < \frac{a_0 + a_1}{1}$, csak akkor nem lehet megoldás, ha minden n -re

$$\frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} > a_{n+1}.$$

Indukcióval belátjuk, hogy ha nincs megoldás, akkor minden i -re

$$a_{i+1} < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_i}{i} \quad \text{és} \quad a_i < a_0 + a_1.$$

Szorozva, majd használva az indukciós feltevést és a sorozat monotonitását:

$$i \cdot a_{i+1} < a_0 + a_1 + \dots + a_i < a_0 + a_1 + (i-1)(a_0 + a_1) = i(a_0 + a_1), \quad a_{i+1} < a_0 + a_1,$$

illetve i -vel szorozva és a_{i+1} -et hozzáadva

$$(i+1)a_{i+1} < a_0 + a_1 + \dots + a_{i+1}, \quad \text{azaz} \quad a_{i+1} < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_{i+1}}{i+1};$$

ha nincs megoldás, ekkor ebből valóban $a_{i+2} < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_{i+1}}{i+1}$ következik. Mivel a sorozat szigorúan monoton növekszik, $i = a_0 + a_1 + 1$ -re ez az állítás nem lehet igaz, tehát mindig van megoldás, és feljebb már igazoltuk, hogy ez egyértelmű.