

A rész. A Naptól jövő sugárzás

A.1. A Stefan–Boltzmann-törvény alapján: $L_{\odot} = (4\pi R_{\odot}^2)(\sigma T_{\odot}^4)$. Innen:

$$T_{\odot} = \left(\frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2 \sigma} \right)^{1/4} = 5,76 \cdot 10^3 \text{ K}.$$

A.2.

$$P_{\text{be}} = \int_0^{\infty} u(f) \, df = \int_0^{\infty} A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi h}{c^2} f^3 \exp(-hf/k_{\text{B}}T_{\odot}) \, df.$$

Legyen $x = \frac{hf}{k_{\text{B}}T_{\odot}}$. Ekkor $f = \frac{k_{\text{B}}T_{\odot}}{h}x$ és $df = \frac{k_{\text{B}}T_{\odot}}{h}dx$. Ezzel:

$$P_{\text{be}} = \frac{2\pi h A R_{\odot}^2}{c^2 d_{\odot}^2} \frac{(k_{\text{B}}T_{\odot})^4}{h^4} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = \frac{2\pi k_{\text{B}}^4}{c^2 h^3} T_{\odot}^4 A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \cdot 6 = \frac{12\pi k_{\text{B}}^4}{c^2 h^3} T_{\odot}^4 A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2}.$$

Másik megoldás, amely *nem* használja a Wien-közelítést:

$$P_{\text{be}} = \frac{L_{\odot}}{4\pi d_{\odot}^2} A = \sigma T_{\odot}^4 A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} = \frac{2\pi^5 k_{\text{B}}^4}{15c^2 h^3} T_{\odot}^4 A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2}.$$

A.3.

$$n_{\gamma}(f) = \frac{u(f)}{hf} = A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi}{c^2} f^2 \exp(-hf/k_{\text{B}}T_{\odot}).$$

A.4. A hasznos kimenő teljesítményt az $E_{\text{g}} = hf_{\text{g}}$ egy fotonra jutó energiakvantum és az $E \geq E_{\text{g}}$ energiájú fotonok számának szorzata adja:

$$\begin{aligned} P_{\text{ki}} &= hf_{\text{g}} \int_{f_{\text{g}}}^{\infty} n_{\gamma}(f) \, df = hf_{\text{g}} A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi}{c^2} \int_{f_{\text{g}}}^{\infty} f^2 \exp(-hf/k_{\text{B}}T_{\odot}) \, df = \\ &= k_{\text{B}}T_{\odot} x_{\text{g}} A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi}{c^2} \left(\frac{k_{\text{B}}T_{\odot}}{h} \right)^3 \int_{x_{\text{g}}}^{\infty} x^2 e^{-x} \, dx = \\ &= \frac{2\pi k_{\text{B}}^4}{c^2 h^3} T_{\odot}^4 A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} x_{\text{g}} (x_{\text{g}}^2 + 2x_{\text{g}} + 2) e^{-x_{\text{g}}}. \end{aligned}$$

A.5. A hatások:

$$\eta = \frac{P_{\text{ki}}}{P_{\text{be}}} = \frac{x_{\text{g}}}{6} (x_{\text{g}}^2 + 2x_{\text{g}} + 2) e^{-x_{\text{g}}}.$$

Ha P_{be} -re az A.2. másik eredményét használjuk, akkor a hatások:

$$\eta = \frac{2\pi k_{\text{B}}^4}{c^2 h^3} \frac{1}{\sigma} x_{\text{g}} (x_{\text{g}}^2 + 2x_{\text{g}} + 2) e^{-x_{\text{g}}} = \left(\frac{90}{\pi^4} \right) \frac{x_{\text{g}}}{6} (x_{\text{g}}^2 + 2x_{\text{g}} + 2) e^{-x_{\text{g}}}.$$

A két eredmény közel van egymáshoz, mert $90/\pi^4 \approx 0,92 \approx 1$.

A.6.

$$\eta = \frac{1}{6} (x_{\text{g}}^3 + 2x_{\text{g}}^2 + 2x_{\text{g}}) e^{-x_{\text{g}}}.$$

A határokon érvényes értékek: $\eta(0) = 0$ és $\eta(\infty) = 0$.

Mivel a zárójelben levő polinom kizárólag pozitív együtthatókat tartalmaz, az monoton növekvő. Az exponenciális függvény monoton csökkenő, és a szorzatuknak valahol maximuma van.

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dx_{\text{g}}} &= \frac{1}{6} (-x_{\text{g}}^3 + x_{\text{g}}^2 + 2x_{\text{g}} + 2) e^{-x_{\text{g}}}, \\ \left. \frac{d\eta}{dx_{\text{g}}} \right|_{x_{\text{g}}=0} &= \frac{1}{3}, \quad \left. \frac{d\eta}{dx_{\text{g}}} \right|_{x_{\text{g}} \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned}$$

Ha az A.2. másik eredményét használjuk, akkor:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dx_{\text{g}}} &= \frac{15}{\pi^4} (-x_{\text{g}}^3 + x_{\text{g}}^2 + 2x_{\text{g}} + 2) e^{-x_{\text{g}}}, \\ \left. \frac{d\eta}{dx_{\text{g}}} \right|_{x_{\text{g}}=0} &= \frac{30}{\pi^4} \approx 0,31, \quad \left. \frac{d\eta}{dx_{\text{g}}} \right|_{x_{\text{g}} \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned}$$



A.7. A maximális értéket ott veszi fel a függvény, ahol

$$\frac{d\eta}{dx_g} = \frac{1}{6}(-x_g^3 + x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g} = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x_g) \equiv x_g^3 - x_g^2 - 2x_g - 2 = 0.$$

Az egyenlet megoldásához használhatjuk például a felező módszert (más numerikus módszer is elfogadható):

$$\begin{aligned} p(0) &= -2, \\ p(1) &= -4, \\ p(2) &= -2, \\ p(3) &= 10 \quad \Rightarrow \quad 2 < x_0 < 3, \\ p(2,5) &= 2,375 \quad \Rightarrow \quad 2 < x_0 < 2,5, \\ p(2,25) &= -0,171 \quad \Rightarrow \quad 2,25 < x_0 < 2,5. \end{aligned}$$

A közelítő érték, ahol η -nak maximuma van: $x_0 = 2,27$. A maximum: $\eta(2,27) = 0,457$.

A.8. Az x_g értéke:

$$x_g = \frac{1,11 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 5763} = 2,23,$$

amivel a hatások:

$$\eta_{\text{Si}} = \frac{x_g}{6}(x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g} = 0,457.$$

Ha az A.2. másik eredményét használjuk, akkor:

$$\eta_{\text{Si}} = \frac{15x_g}{\pi^4}(x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g} = 0,422.$$

A.9. A Nap teljes gravitációs potenciális energiája:

$$\Omega = - \int_0^{M_\odot} \frac{Gm \, dm}{r}.$$

Az egyenletes tömegeloszlás miatt:

$$\varrho = \frac{3M_\odot}{4\pi R_\odot^3}, \quad m = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho, \quad dm = 4\pi r^2 \varrho \, dr.$$

Ezzel:

$$\Omega = - \int_0^{R_\odot} G \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho \right) (4\pi r^2 \varrho) \frac{dr}{r} = - \frac{16\pi^2 G \varrho^2}{3} \frac{R_\odot^5}{5} = - \frac{3}{5} \frac{GM_\odot^2}{R_\odot}.$$

A.10.

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{-\Omega}{L_\odot} = \frac{3GM_\odot^2}{5R_\odot L_\odot} = 1,88 \cdot 10^7 \text{ év}.$$

B rész. A Napból jövő neutrínók

B.1. ΔE energia felszabadulása során két neutrínó keletkezik, így

$$\Phi_\nu = 2 \cdot \frac{L_\odot}{4\pi d_\odot^2 \Delta E} = 2 \cdot \frac{3,85 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot (1,50 \cdot 10^{11})^2 \cdot 4,0 \cdot 10^{-12}} = 6,8 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-2}.$$

B.2. Legyen ε a neutrínó detektálásának hatásfoka, N_0 a bejövő részecskeszám. Ezzel:

$$\begin{aligned} N_1 &= \varepsilon N_0, \\ N_e &= \varepsilon N_0(1 - r), \\ N_x &= \varepsilon N_0 r / 6, \\ N_2 &= N_e + N_x. \end{aligned}$$

Tehát:

$$(1 - r)N_1 + \frac{r}{6}N_1 = N_2,$$

innen a kérdézet hányados:

$$r = \frac{6}{5} \left(1 - \frac{N_2}{N_1} \right).$$

B.3. Amikor egy elektron már éppen nem bocsát ki Cserenkov-sugárzást, a sebessége $v_{\text{stop}} = c/n$ -re csökken. Az elektron teljes energiája ekkor:

$$E_{\text{stop}} = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - v_{\text{stop}}^2/c^2}} = \frac{nm_e c^2}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Abban a pillanatban, miután a neutrínó kiütötte az elektront, az elektron energiája:

$$E_{\text{start}} = \alpha \Delta t + \frac{nm_e c^2}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

A kölcsönhatás előtt az elektron energiája $m_e c^2$. Így a neutrínónak átadott energia:

$$E_{\text{átadott}} = E_{\text{start}} - m_e c^2 = \alpha \Delta t + \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right) m_e c^2.$$

B.4. A ${}^7\text{Be}$ atommagok mozgása miatt Doppler-effektus lép fel a neutrínókra. Mivel az energia relatív megváltozása kicsiny ($\Delta E_{\text{rms}}/E_\nu \sim 10^{-4}$), a nemrelativisztikus Doppler-eltolódással lehet számolni (a relativisztikus számolás szinte azonos eredményt ad). A megfigyelés irányának a z irányt véve:

$$\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_\nu} = \frac{v_{z,\text{rms}}}{c} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} V_{\text{Be}}}{c} = 3,85 \cdot 10^{-4}.$$

Tehát a Be atommagok sebességének négyzetes középértéke:

$$V_{\text{Be}} = \sqrt{3} \cdot 3,85 \cdot 10^{-4} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} = 2,01 \cdot 10^5 \text{ ms}^{-1}.$$

A Nap magjának átlagos hőmérséklete pedig:

$$\frac{1}{2} m_{\text{Be}} V_{\text{Be}}^2 = \frac{3}{2} k_{\text{B}} T_{\text{c}} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{c}} = 1,13 \cdot 10^7 \text{ K}.$$