I. megoldás. Tegyük fel, hogy a polinom szorzattá alakítható,

$$x(x+4)+a\big(y^2-1\big)+2by=(Ax+By+C)(Dx+Ey+F),$$

ahol A, B, C, D, E és F valós számok. Mivel két polinom pontosan akkor egyezik meg, ha megfelelő együtthatóik megegyeznek, és az eredeti polinomban x^2 együtthatója 1, azért $AD=1$. Az első lineáris tényezőt A-val, a másodikat pedig D-vel osztva szintén az eredeti polinom két elsőfokú polinom szorzatára való felbontását kapjuk, ezért elegendő az

$$x(x+4)+a\big(y^2-1\big)+2by=(x+uy+v)(x+py+q)$$

alakú szorzatra bonthatóság feltételét megadnunk.

A megfelelő együtthatókat összehasonlítva a következő egyenleteket kapjuk:

(1) $$y^2: a=up,$$
(2) $$xy: 0=u+p,$$
(3) $$x: 4=v+q,$$
(4) $$y: 2b=uq+vp,$$
(5) $$\text{konstans:}\ -a=vq.$$

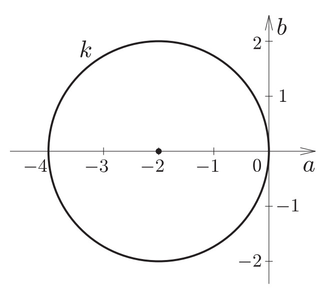
Ha $a=0$, akkor (1) és (2) miatt $u=p=0$, s így (4)-ből adódik, hogy csak $b=0$ esetén lehetséges a szorzattá bontás (ebben az esetben viszont az eredeti polinom nem kétváltozós). Ha $a\neq 0$, akkor (1) miatt $u\neq 0$. A (2) egyenletből $p=-u$, amit (1)-be, illetve (4)-be írva kapjuk, hogy $a=-u^2$ és $2b=u(q-v)$. Ez utóbbiból $q-v=2b/u$ következik, s így (3)-at figyelembe véve $q=2+b/u$ és $v=2-b/u$. Végül ezeket (5)-be beírva

$$-a=\left(2-\frac{b}{u}\right)\left(2+\frac{b}{u}\right)=4-\frac{b^2}{u^2}=4-\frac{b^2}{-a},$$

azaz $a^2=-4a-b^2$, vagyis $(a+2)^2+b^2=4$. Ez a $(-2,0)$ középpontú, 2 sugarú k kör egyenlete. Tehát ha a polinom szorzattá bontható, akkor az $(a;b)$ pont rajta van k-n.

Megfordítva, ha k egy tetszőleges $(c;d)$ pontját vesszük, akkor $c\le 0$ teljesül. Ha $c=0$, akkor $d=0$ is teljesül. A $(0;0)$ párhoz a nyilvánvalóan szorzattá bomló $x(x+4)$ polinom tartozik. Ha $c\neq 0$, akkor legyen

$$u=\sqrt{-c},\quad p=-\sqrt{-c},\quad v=2-\frac{d}{\sqrt{-c}}\quad \text{és}\quad q=2+\frac{d}{\sqrt{-c}}.$$



Egyszerű számolással adódik, hogy

$$(x+uy+v)(x+py+q)=x^2+4x+cy^2+2dy-c,$$

vagyis az eredeti polinom két elsőfokú polinom szorzatára bomlik.

Tehát a keresett mértani hely a $(-2;0)$ középpontú, 2 sugarú kör.

II. megoldás. Koordinátageometriai módszerekkel kicsit kevesebb számolással is belátható az I. megoldásban megadott feltétel szükségessége. A következő gondolatmenettel viszont a feltétel elégségességét nem tudjuk belátni.

Alkalmazzuk az $x=w-2$, $y=z+1$ lineáris helyettesítést. Ekkor

$$P(x,y)=x(x+4)+a\big(y^2-1\big)+2by=w^2+az^2+2(a+b)z+2b-4=Q(w,z).$$

Mivel lineáris helyettesítésnél elsőfokú polinomból elsőfokú polinomot kapunk, $P(x,y)$ pontosan akkor bomlik két elsőfokú polinom szorzatára, amikor $Q(w,z)$ felbomlik.

Tekintsük a $Q(w,z)=0$ egyenletnek eleget tevő pontokat a síkon. Ha

$$Q(w,z)=(Aw+Bz+C)(Dw+Ez+F),$$

akkor ezek a pontok az

$$Aw + Bz + C = 0 \quad \text{és} \quad Dw + Ez + F = 0$$

egyenletű (esetleg egybeeső) egyeneseket alkotják. Mivel $Q(w,z)$-ben w^2 együtthatója 1, ezért a felbontásban szereplő együtthatókra $AD = 1$ teljesül, tehát az egyenesek egyike sem párhuzamos a w koordinátatengellyel.

Ha $a = 0$ és $b \neq 0$, akkor

$$z = -\frac{1}{2b}w^2 - 1 + \frac{2}{b},$$

ami egy parabola egyenlete, tehát ebben az esetben nem bontható fel a polinom lineáris tényezőkre. Ha viszont $a = b = 0$, akkor $Q(w,z) = w^2$, ami nyilván felbontható például $w \cdot w$ alakban. Ekkor a tényezőknek megfelelő két egyenes egybeesik.

Ha $a \neq 0$, akkor $Q(w,z)$-ben szerepel z^2-es tag, ezért mindkét lineáris tényezőnek kell tartalmaznia cz típusú tagot ahol $c \neq 0$ egy valós szám. Ez azt jelenti, hogy a tényezőknek megfelelő egyenesek egyike sem párhuzamos az z koordinátatengellyel, azaz minden d valós szám esetén a $z = d$ egyenletű egyenes metszi a $Q(w,z) = 0$ egyenletű ponthalmazt. A $Q(w,z) = 0$ egyenletet átrendezve kapjuk, hogy

$$w^2 = -az^2 - 2(a+b)z - 2b + 4.$$

Mivel $w^2 \geq 0$, ezért a bal oldalon lévő ($a \neq 0$ miatt) másodfokú polinom egyetlen $z = d$ helyettesítésre sem vehet fel negatív értéket, mert az azt jelentené, hogy a $z = d$ egyenletű egyenes nem metszené a $Q(w,z) = 0$ egyenletű ponthalmazt. Másrészt viszont a $w = 0$ egyenletű egyenes nem párhuzamos a ponthalmazt alkotó egyenesekkel, ezért metszi a ponthalmazt, vagyis a

$$-az^2 - 2(a+b)z - 2b + 4 = 0 \tag{6}$$

egyenletnek van gyöke. E két feltétel pontosan akkor teljesül egyszerre, ha a (6) egyenlet diszkriminánsa 0. Tehát $a \neq 0$ esetén ha $Q(w,z)$ lineáris tényezőkre bomlik, akkor

$$\big(-2(a+b)\big)^2 - 4(-a)(-2b+4) = 0, \quad \text{azaz} \quad (a+2)^2 + b^2 = 4.$$

Megjegyzés. A második megoldásból is megkapható a feltétel elégségessége, ehhez azonban a másodfokú egyenletekkel adott ponthalmazok az ún. *másodrendű görbék* alaposabb ismerete szükséges. Írjuk a $P(x,y)$ polinomot mátrix alakba a következőképpen:

$$(x+4) + a\big(y^2 - 1\big) + 2by = (x,y,1)M(x,y,1)^T,$$

ahol

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & b \\ 2 & b & -a \end{pmatrix}.$$

Ismert tétel, hogy a polinom akkor és csak akkor alakítható szorzattá a komplex számok körében, ha $\det M = 0$. A tényezőkben szereplő együtthatók akkor valósak, ha az is teljesül, hogy az M mátrix bal felső 2×2-es részmátrixának determinánsa nempozitív.