

Megoldás. A hatványok átírásával

$$2^{3(2x-1)} - 1 = 7^{3(x-1)} + \frac{3}{14} \cdot 2^{2x} 7^x.$$

Ebben a formában már látható, hogy érdemes az $a = 2^{2x-1}$ és $b = 7^{x-1}$ új ismeretlenek bevezetésével kezelhetőbb szerkezetűvé tenni egyenletünket. Az exponenciális kifejezések pozitívak, tehát $a, b > 0$.

$$a^3 - b^3 - 1 - 3ab = 0.$$

A következő lépéshez felhasználjuk az ismert

$$u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu)$$

algebrai azonosságot. (Az azonosság a jobb oldalon kijelölt szorzás elvégzésével és összevonással néhány lépésben igazolható.)

Legyen az azonosságban $u = a, v = -b$ és $w = -1$. Az eddigiek alapján az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható:

$$(a - b - 1)(a^2 + b^2 + 1 + ab + a - b) = 0.$$

Szorzat csak abban az esetben lehet nulla, ha egyik tényezője nulla, így elegendő az

$$a - b - 1 = 0 \quad \text{és} \quad a^2 + b^2 + 1 + ab + a - b = 0$$

egyenleteket megoldani. Tekintsük előbb a második egyenletet. Ezt – a szokásos módon – kettővel szorozva, három teljes négyzet összegévé alakíthatjuk:

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2b^2 + 2 + 2ab + 2a - 2b &= 0, \\ (a + b)^2 + (a + 1)^2 + (b - 1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Négyzetösszeg csak abban az esetben lehet nulla, ha mindegyik tag nulla. Ebben az esetben ez nem teljesülhet, mivel a és b is pozitívak, vagyis $(a + b)^2$ és $(b + 1)^2$ is biztosan pozitív.

Az egyenlet összes megoldásait tehát kizárólag az

$$a - b - 1 = 0$$

esetből kaphatjuk. A változók eredeti jelentése szerint pedig:

$$2^{2x-1} - 7^{x-1} - 1 = 0.$$

Alakítsuk úgy az első tagot, hogy a kitevő ott is $(x - 1)$ legyen:

$$2 \cdot 4^{x-1} - 7^{x-1} - 1 = 0.$$

Az egyenletet rendezve és osztva a pozitív 4^{x-1} -nel:

$$2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{x-1}.$$

Vizsgáljuk meg a két oldalon található függvényeket konvexitás szerint. Mind a $\left(\frac{7}{4}\right)^{x-1}$, mind pedig az $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$ kifejezésekkel meghatározott függvények szigorúan konvexek az egész értelmezési tartományukon, a valós számok halmazán. A (-1) -gyel történő szorzás szemléletesen az x -tengelyre vonatkozó tükrözést jelent, így az $f(x) = -\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$,

illetve a 2-vel fölfelé eltolt $g(x) = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$ függvény már szigorúan konkáv. Ismert, hogy egy konvex és egy konkáv függvénynek legfeljebb két metszéspontja lehet. Ezek a metszéspontok az $x = 1$ és $x = 2$ helyettesítésekkel azonnal adódnak is. ($2 - 1 = 1$, illetve $2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.)

Átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért $x = 1, x = 2$ valóban megoldásai az eredeti egyenletnek.